EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2016年12月10日（土）
4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．

(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(8) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(9) 問題冊子は持ち帰ること．

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．

(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は $(\boxed{\mathbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第 1 分野	微分積分	…… 3
第 2 分野	線形代数	…… 15
第 3 分野	常微分方程式	…… 25
第 4 分野	確率・統計	…… 35

第１分野　微分積分

〔問１〜問６：解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{20}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問１ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)} - \frac{x}{x^2-1}\right) = \boxed{\mathbf{1}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^{-1}\dfrac{x}{5}}{x} = \boxed{\mathbf{2}}$ である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3		
④ $\dfrac{1}{5}$	⑤ $\dfrac{2}{5}$	⑥ $\dfrac{3}{5}$	⑦ $\dfrac{4}{5}$	⑧ $\dfrac{1}{4}$	⑨ $\dfrac{3}{4}$
ⓐ $\dfrac{1}{3}$	ⓑ $\dfrac{2}{3}$	ⓒ $\dfrac{1}{2}$			

計算用紙

問 2 関数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ の導関数を求める．両辺の自然対数をとると，

$$\log y = \boxed{\mathbf{3}} \log x$$

となる．さらに，両辺を x で微分すると，

$$\boxed{\mathbf{4}} \frac{dy}{dx} = \boxed{\mathbf{5}}$$

である．したがって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{\mathbf{5}}}{\boxed{\mathbf{4}}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{3}}$・$\boxed{\mathbf{4}}$ の解答群

⓪ x	① $-x$	② x^2	③ $-x^2$
④ $\dfrac{1}{x}$	⑤ $-\dfrac{1}{x}$	⑥ $\dfrac{1}{x^2}$	⑦ $-\dfrac{1}{x^2}$
⑧ y	⑨ $-y$	ⓐ y^2	ⓑ $-y^2$
ⓒ $\dfrac{1}{y}$	ⓓ $-\dfrac{1}{y}$	ⓔ $\dfrac{1}{y^2}$	ⓕ $-\dfrac{1}{y^2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 1	① $1 + \log x$	② $1 - \log x$	
③ $\dfrac{1}{x^2}$	④ $-\dfrac{\log x}{x^2}$	⑤ $\dfrac{1 + \log x}{x^2}$	⑥ $\dfrac{1 - \log x}{x^2}$
⑦ $\dfrac{x + \log x}{x^2}$	⑧ $\dfrac{x - \log x}{x^2}$		

計算用紙

問 3 不定積分 $I = \displaystyle\int \tan^{-1} x\, dx$ を計算する．$I = \displaystyle\int x' \tan^{-1} x\, dx$ とみなして部分積分を行うと，

$$I = \boxed{\mathbf{6}} - \int \boxed{\mathbf{7}}\, dx = \boxed{\mathbf{6}} - \boxed{\mathbf{8}} \qquad \text{(積分定数は省略)}$$

である．

$\boxed{\mathbf{6}}$ の解答群

⓪ 1	① x	② $\dfrac{x^2}{2}$
③ $\tan^{-1} x$	④ $x \tan^{-1} x$	⑤ $\dfrac{x^2}{2} \tan^{-1} x$
⑥ $\dfrac{1}{\cos^2 x}$	⑦ $\dfrac{x}{\cos^2 x}$	⑧ $\dfrac{x^2}{2\cos^2 x}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ の解答群

⓪ 1

① $\dfrac{1}{1+x}$	② $\dfrac{x}{1+x}$	③ $\dfrac{x}{1+x^2}$
④ $\dfrac{1}{1-x}$	⑤ $\dfrac{x}{1-x}$	⑥ $\dfrac{x}{1-x^2}$
⑦ $\dfrac{1}{\cos^2 x}$	⑧ $\dfrac{x}{\cos^2 x}$	

$\boxed{\mathbf{8}}$ の解答群

⓪ x	① x^2	② $\tan x$
③ $\log\lvert 1+x\rvert$	④ $\log\lvert 1-x\rvert$	⑤ $x - \log\lvert 1+x\rvert$
⑥ $-x - \log\lvert 1-x\rvert$	⑦ $\log(1+x^2)$	⑧ $\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)$
⑨ $\dfrac{x}{2}\log(1+x^2)$		

計算用紙

問 4 xyz 空間内において，関数 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\big((x,y,z) \neq (0,0,0)\big)$ の 2 階偏導関数を考える．$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおくと，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \boxed{\textbf{9}}$$

となる．また，$u = \dfrac{1}{r}$ より，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \boxed{\textbf{10}}$$

を得る．さらに，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \boxed{\textbf{11}}$$

である．同様に，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ を計算すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \boxed{\textbf{12}}$$

となる．

$\boxed{9}$ ・ $\boxed{10}$ の解答群

⓪ 0　① 1

② $\dfrac{x}{r}$　③ $\dfrac{x}{r^2}$　④ $\dfrac{x^2}{r^2}$　⑤ $\dfrac{x}{r^3}$　⑥ $\dfrac{x^2}{r^3}$

⑦ $-\dfrac{x}{r}$　⑧ $-\dfrac{x}{r^2}$　⑨ $-\dfrac{x^2}{r^2}$　ⓐ $-\dfrac{x}{r^3}$　ⓑ $-\dfrac{x^2}{r^3}$

$\boxed{11}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{r^3}$　① $\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^4}$　② $\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^5}$　③ $\dfrac{1}{r^4} - \dfrac{3x^2}{r^6}$

④ $-\dfrac{1}{r^3}$　⑤ $-\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3x^2}{r^4}$　⑥ $-\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3x^2}{r^5}$　⑦ $-\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{3x^2}{r^6}$

$\boxed{\mathbf{12}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1

② $\dfrac{3}{r}$　③ $\dfrac{1}{r^2}$　④ $\dfrac{3}{r^3}$

⑤ $-\dfrac{1}{r}$　⑥ $-\dfrac{3}{r^2}$　⑦ $-\dfrac{3}{r^3}$

問 5　xy 平面内の集合 D が

$$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leqq 9,\ x + y \geqq 0\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2 + 9}\, dxdy$$

の値を求める．極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと，D に対応する (r, θ) の集合は

$$E = \left\{(r, \theta) \,|\, 0 \leqq r \leqq \boxed{\mathbf{13}},\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{14}}\right\}$$

であるから，

$$I = \int_0^{\boxed{\mathbf{13}}} \left\{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\boxed{\mathbf{14}}} \boxed{\mathbf{15}}\, d\theta\right\} dr$$

となる．ここで，

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\boxed{\mathbf{14}}} \boxed{\mathbf{15}}\, d\theta = \boxed{\mathbf{16}}$$

であるから，

$$I = \int_0^{\boxed{\mathbf{13}}} \boxed{\mathbf{16}}\, dr = \boxed{\mathbf{17}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{13}}$ ・ $\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ $\dfrac{\pi}{4}$　⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑦ $\dfrac{\pi}{3}$　⑧ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑨ $\dfrac{\pi}{2}$　ⓐ π

$\boxed{\mathbf{15}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{r\cos\theta}{r^2 + 9}$　① $\dfrac{r\sin\theta}{r^2 + 9}$　② $\dfrac{r^2\cos\theta}{r^2 + 9}$　③ $\dfrac{r^2\sin\theta}{r^2 + 9}$

$\boxed{16}$ **の解答群**

⓪ 0　① $\dfrac{\sqrt{2}\,r}{r^2+9}$　② $\dfrac{\sqrt{2}\,r^2}{r^2+9}$　③ $\dfrac{r^2}{\sqrt{2}\,(r^2+9)}$

④ $\dfrac{r}{\sqrt{2}\,(r^2+9)}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{2}\,r}{r^2+9}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{2}\,r^2}{r^2+9}$

⑦ $-\dfrac{r^2}{\sqrt{2}\,(r^2+9)}$　⑧ $-\dfrac{r}{\sqrt{2}\,(r^2+9)}$

$\boxed{17}$ **の解答群**

⓪ 0　① $3\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\pi}{6}\right)$　② $3\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)$　③ $3\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$

④ $3\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\pi}{6}\right)$　⑤ $3\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$　⑥ $3\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)$

問 6　正数 t をパラメータとする xy 平面内の曲線

$$C_t : y = tx^2 + \frac{1}{t}$$

の集まりを記号 $\{C_t\}_{t>0}$ で表す．微分可能な関数 $\varphi(t), \psi(t)$ によって与えられる曲線 $C : x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ $(t > 0)$ が次の条件を満たすとき，C は $\{C_t\}_{t>0}$ の包絡線であると言う．

(i)　各 t について C 上の点 $\mathrm{P}(\varphi(t), \psi(t))$ は C_t の上にもある．

(ii)　各 t について C と C_t は $\mathrm{P}(\varphi(t), \psi(t))$ において接線を共有する．

包絡線を次のように求める．まず (i) より

$$(*) \qquad \psi(t) = t\varphi(t)^2 + \frac{1}{t}$$

が成り立つ．$(*)$ の両辺を t で微分すると

$$(**) \qquad \psi'(t) = \boxed{\textbf{18}} - \frac{1}{t^2}$$

となる．また (ii) より点 $\mathrm{P}(\varphi(t), \psi(t))$ における C と C_t の接線の傾きは等しいから

$$(***) \qquad \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \boxed{\textbf{19}}$$

が成り立つ．$(**)$ と $(***)$ より $\varphi(t)^2 = \boxed{\textbf{20}}$ を得る．これを $(*)$ に代入し，整理すると，$x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ より，

$$y = 2|x| \quad (x \neq 0)$$

を得る．

18 ・ **19** **の解答群**

⓪ $2t\varphi(t)$	① $\varphi(t) + 2t\varphi(t)$	② $\varphi(t)^2 + 2t\varphi(t)$
③ $2t\varphi'(t)$	④ $\varphi(t) + 2t\varphi'(t)$	⑤ $\varphi(t)^2 + 2t\varphi'(t)$
⑥ $2\varphi(t)\varphi'(t)$	⑦ $\varphi(t) + 2\varphi(t)\varphi'(t)$	⑧ $\varphi(t)^2 + 2\varphi(t)\varphi'(t)$
⑨ $2t\varphi(t)\varphi'(t)$	ⓐ $\varphi(t) + 2t\varphi(t)\varphi'(t)$	ⓑ $\varphi(t)^2 + 2t\varphi(t)\varphi'(t)$

$\boxed{\mathbf{20}}$ **の解答群**

⓪ t	① t^2	② t^3	③ $\dfrac{1}{t}$	④ $\dfrac{1}{t^2}$	⑤ $\dfrac{1}{t^3}$
⑥ $-t$	⑦ $-t^2$	⑧ $-t^3$	⑨ $-\dfrac{1}{t}$	ⓐ $-\dfrac{1}{t^2}$	ⓑ $-\dfrac{1}{t^3}$

第２分野　線形代数

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{21}}$ ～ $\boxed{\mathbf{37}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\operatorname{rank} A$ は A の階数（ランク）を表す．また，1 次独立，1 次従属はそれぞれ線形独立，線形従属ともいう．

問 1 (1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を考える．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ が直交するように定数 c を定めると $c = \boxed{\mathbf{21}}$ である．このとき，$\boldsymbol{u}$ と $c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ の大きさを 1 に正規化したものをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ とすると，

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \boxed{\mathbf{22}}$$

である．

$\boxed{21}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$

⑤ -1　⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{1}{3}$　⑧ $-\frac{1}{4}$

$\boxed{22}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　① $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　② $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

③ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$　④ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は 5 と $\boxed{\mathbf{23}}$ である．また，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\mathbf{24}} \end{pmatrix}$ は固有値 5 に対する固有ベクトルである．

$\boxed{\mathbf{23}}$ ・ $\boxed{\mathbf{24}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
	⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4

問 2　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

が 1 次独立であるかどうかを調べる.

そこで, c_1, c_2, c_3 を未知数とする方程式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を考えると,

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 0 \\ c_1 + 4c_2 + 7c_3 = 0 \\ c_1 + 5c_2 + 9c_3 = 0 \end{cases}$$

を得る. これを解くと,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\mathbf{25}} \\ \boxed{\mathbf{26}} \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

を得る. 特に $t = 1$ とおくと,

$$\boldsymbol{a}_1 + \boxed{\mathbf{25}}\,\boldsymbol{a}_2 + \boxed{\mathbf{26}}\,\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

が成り立つので, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\boxed{\mathbf{27}}$.

$\boxed{25}$ ・ $\boxed{26}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

$\boxed{27}$ の解答群

⓪ 1 次独立である　　① 1 次従属である

② 1 次独立であるとも 1 次従属であるとも言えない

計算用紙

問 3　行列 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列 X^{-1} を求める．

$X = E + A$ (E は 3 次単位行列) と分解すると，$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，$A^3 = O$

(O は 3 次零行列) となる．したがって，$(E+A)(E-A+A^2) = \boxed{\mathbf{28}}$ より，

$$X^{-1} = \boxed{\mathbf{29}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \boxed{\mathbf{30}} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{28}$ ・ $\boxed{29}$ の解答群

⓪ O

① E　　② $E+A$　　③ $E-A$

④ $E+A+A^2$　　⑤ $E-A+A^2$　　⑥ $E-A-A^2$

$\boxed{30}$ の解答群

⓪ 0　　① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4

⑤ -1　　⑥ -2　　⑦ -3　　⑧ -4

計算用紙

問 4　連立1次方程式

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x - y + cz = 2 \\ 2x + cy - z = 1 \end{cases}$$

について考える．ただし，c は定数とする．この方程式の係数行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & c \\ 2 & c & -1 \end{pmatrix}$

であり，拡大係数行列は $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & c & 2 \\ 2 & c & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(1)　$c = \boxed{\textbf{31}}$ のとき，A と B の階数は等しくないので，方程式は $\boxed{\textbf{32}}$ ．

(2)　$c = \boxed{\textbf{33}}$ のとき，A と B の階数はともに 2 なので，方程式は $\boxed{\textbf{34}}$ ．

$\boxed{\textbf{31}}$ ・ $\boxed{\textbf{33}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ -1　⑥ -2　⑦ -3　⑧ -4

$\boxed{\textbf{32}}$ ・ $\boxed{\textbf{34}}$ の解答群

⓪ 解をもたない　① ただ1つの解をもつ　② 無数の解をもつ

計算用紙

問 5　実数 x に対し，

$$A = \begin{pmatrix} x+2 & x+1 \\ x^2 & x^2-1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2-x & 3 & 3 \\ 4 & 3-x & 5 \\ -4 & -4 & -6-x \end{pmatrix}$$

とおく．また，$|A|$, $|B|$ はそれぞれ A, B の行列式を表す．

(1)　$|A| = 0$ を満たす x をすべてあげると $\boxed{\mathbf{35}}$ である．

(2)　$|B| = 0$ を満たす x をすべてあげると $\boxed{\mathbf{36}}$ である．

(3)　$\operatorname{rank} A = 2$ かつ $|B| = 0$ を満たす x をすべてあげると $\boxed{\mathbf{37}}$ である．

$\boxed{\mathbf{35}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群

⓪ -2	① -1	② 0	③ 1	④ 2
⑤ $-2,\ 1$	⑥ $-2,\ 2$	⑦ $-1,\ 0$	⑧ $-1,\ 2$	
⑨ $-2,\ -1,\ 2$	ⓐ $-1,\ 0,\ 2$	ⓑ $-1,\ 1,\ 2$	ⓒ $0,\ 1,\ 2$	

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{38}}$ 〜 $\boxed{\textbf{54}}$ 〕

(注意)　各問における y, z は x の関数であり，y', z', y'' はそれぞれ導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　(1)　微分方程式

$$y' = y^2 - 1$$

の一般解は，$y = \boxed{\textbf{38}}$ である．

$\boxed{\textbf{38}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{3}x^3 - x + C$	① $\log\|x^2 - 1\| + C$	② $\sin x + C$
③ $\sin^{-1} x + C$	④ $\tan x + C$	⑤ $\tan^{-1} x + C$
⑥ $2x + C$	⑦ $1 + Ce^x$	⑧ $-\dfrac{1}{2}(1 + Ce^x)$
⑨ $\sqrt{1 + Ce^x}$	ⓐ $\dfrac{C + 2x}{C - 2x}$	ⓑ $\dfrac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}$
ⓒ $\dfrac{1 + \log(2x + C)}{1 - \log(2x + C)}$	ⓓ $\dfrac{1 - \log(2x + C)}{1 + \log(2x + C)}$	

(C は任意定数)

(2) 微分方程式

$$y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}$$

の一般解は，$y = \boxed{\mathbf{39}}$ である．

$\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ $Ce^{2x} + \dfrac{x^3}{3}$　① $\dfrac{x^3}{3}e^{-x} + C$　② $Ce^{-2x} + \dfrac{x^3}{3}$

③ $\dfrac{x^3}{3}e^{-2x} + C$　④ $Ce^{x^2} + \dfrac{x^3}{3}$　⑤ $\dfrac{x^3}{3}e^{x^2} + C$

⑥ $Ce^{-x^2} + \dfrac{x^3}{3}$　⑦ $\dfrac{x^3}{3}e^{-x^2} + C$　⑧ $e^{2x}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$

⑨ $\dfrac{Cx^3}{3}e^{-x}$　ⓐ $e^{-2x}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$　ⓑ $\dfrac{Cx^3}{3}e^{-2x}$

ⓒ $e^{x^2}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$　ⓓ $\dfrac{Cx^3}{3}e^{x^2}$　ⓔ $e^{-x^2}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$

ⓕ $\dfrac{Cx^3}{3}e^{-x^2}$

(C は任意定数)

問 2 微分方程式

$$(*) \qquad xe^{\frac{y}{x}} + y - xy' = 0, \quad x > 0$$

を考える．このとき，

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

とおくと $y' = \boxed{\mathbf{40}}$ となるから，$u(x)$ に関する微分方程式

$$(**) \qquad u' = \boxed{\mathbf{41}}$$

が得られる．この方程式 $(**)$ の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{\mathbf{42}}$$

である．したがって，$(*)$ の一般解は

$$y(x) = x\,\boxed{\mathbf{42}}$$

となる．

$\boxed{40}$ の解答群

⓪ u'	① $-u'$	② $u+u'$	③ $u-u'$
④ xu'	⑤ $-xu'$	⑥ $u+xu'$	⑦ $u-xu'$
⑧ $-u-u'$	⑨ $-u+u'$	ⓐ $-u-xu'$	ⓑ $-u+xu'$

$\boxed{41}$ の解答群

⓪ xu	① $-xu$	② e^{xu}	③ e^{-xu}	④ xe^{u}
⑤ xe^{-u}	⑥ $\dfrac{e^{u}}{x}$	⑦ $\dfrac{e^{-u}}{x}$	⑧ x^2e^{u}	⑨ x^2e^{-u}
ⓐ $\dfrac{e^{u}}{x^2}$	ⓑ $\dfrac{e^{-u}}{x^2}$			

$\boxed{42}$ **の解答群**

⓪ $C+\dfrac{1}{x}$　① $C-\dfrac{1}{x}$　② $\dfrac{C}{x}$

③ $-\dfrac{C}{x}$　④ $C+\log x$　⑤ $C-\log x$

⑥ $C+\log|\log x|$　⑦ $C-\log|\log x|$　⑧ $\log(C+\log x)$

⑨ $-\log(C+\log x)$　ⓐ $\log(C-\log x)$　ⓑ $-\log(C-\log x)$

ⓒ $\log\left(C+\dfrac{1}{x}\right)$　ⓓ $\log\left(C-\dfrac{1}{x}\right)$　ⓔ $-\log\left(C+\dfrac{1}{x}\right)$

ⓕ $-\log\left(C-\dfrac{1}{x}\right)$

(C は任意定数)

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad\qquad y'' - 4y = 8x - 4$$

について考える．

(1)　対応する同次方程式

$$y'' - 4y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{43}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{43}}$ **の解答群**

⓪ $C_1 e^{4x} + C_2$　　① $C_1 e^{-4x} + C_2$　　② $C_1 e^{2x} + C_2$

③ $C_1 e^{-2x} + C_2$　　④ $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$　　⑤ $(C_1 + C_2 x) e^{2x}$

⑥ $C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2) 微分方程式 $(*)$ の特殊解を

$$y_p(x) = ax + b$$

とおくと,

$$a = \boxed{\mathbf{44}}, \quad b = \boxed{\mathbf{45}}$$

である.

$\boxed{\mathbf{44}}$ ・ $\boxed{\mathbf{45}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ $\dfrac{1}{2}$

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ $-\dfrac{1}{2}$

(3) (1), (2) より，微分方程式 $(*)$ の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{46}}$$

である.

$\boxed{\mathbf{46}}$ の解答群

⓪ $C_1e^{4x} + C_2 - 2x$　① $C_1e^{-4x} + C_2 - 8x$

② $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + 2x - 1$　③ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x + 1$

④ $(C_1 + C_2x)e^{2x} + 2x - 1$　⑤ $(C_1 + C_2x)e^{2x} - 2x + 1$

⑥ $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2x - 1$　⑦ $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 2x + 1$

(C_1, C_2 は任意定数)

問 4 未知関数 $y(x), z(x)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = -2y + z \\ z' = \ \ ay \end{cases}$$

を考える．ただし，a は定数とする．

(1) $(*)$ の 2 つの方程式から z を消去し，y に関する単独の 2 階微分方程式を導くと，

$$(**) \qquad y'' + 2y' + \boxed{\textbf{47}}\, y = 0.$$

(2) 方程式 $(**)$ の特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + \boxed{\textbf{47}} = 0$ が重解を持つのは $a = \boxed{\textbf{48}}$ のときである．

47 ・ 48 の解答群

⓪ 0

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3 ⑥ -3

⑦ 4 ⑧ -4 ⑨ a ⓐ $-a$ ⓑ $2a$ ⓒ $-2a$

(3) $a = \boxed{\textbf{48}}$ のとき，方程式 $(**)$ の一般解は $y = \boxed{\textbf{49}}$ であり，初期条件 $y(0) = 2, y'(0) = 1$ を満たす解は $y = \boxed{\textbf{50}}$ である．また，この初期条件のもとで $z = \boxed{\textbf{51}}$ が得られる．

49 の解答群

⓪ $C_1e^x + C_2$ ① $C_1e^{-x} + C_2$ ② $C_1e^x + C_2e^{-x}$

③ $(C_1x + C_2)e^x$ ④ $(C_1x + C_2)e^{-x}$ ⑤ $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

⑥ $(C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x$ ⑦ $(C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x}$

(C_1, C_2 は任意定数)

$\boxed{\textbf{50}}$ **の解答群**

⓪ $e^x + 1$　① $-e^x + 3$　② $\dfrac{1}{2}(3e^x + e^{-x})$

③ $\dfrac{1}{2}(e^x + 3e^{-x})$　④ $(-x + 2)e^x$　⑤ $(3x + 2)e^x$

⑥ $(x + 2)e^{-x}$　⑦ $(3x + 2)e^{-x}$　⑧ $2\cos x + \sin x$

⑨ $\cos x + 2\sin x$

$\boxed{\textbf{51}}$ **の解答群**

⓪ $3e^x + 2$　① $-3e^x + 6$　② $\dfrac{1}{2}(9e^x + e^{-x})$

③ $\dfrac{3}{2}(e^x - e^{-x})$　④ $(-3x + 5)e^x$　⑤ $9(x + 1)e^x$

⑥ $(x + 3)e^{-x}$　⑦ $(3x + 5)e^{-x}$　⑧ $5\cos x$

⑨ $3\sin x$

(4) $a <$ $\boxed{\textbf{48}}$ のとき，初期条件 $y(0) = 2, y'(0) = 1$ を満たす方程式 $(**)$ の解 $y(x)$ は $x \to \infty$ のとき $\boxed{\textbf{52}}$ ．

$\boxed{\textbf{52}}$ **の解答群**

⓪ 0に収束する　① 1に収束する

② $+\infty$ に発散する　③ $-\infty$ に発散する

問 5 xy 平面において，原点を頂点とし，x 軸を対称軸にもつすべての放物線を表す微分方程式を求める．これらの放物線は，0 でない任意の定数 a を用いて，

$$(*) \qquad x = ay^2$$

と表される．y を x の関数と考えて，方程式 $(*)$ の両辺を x で微分すると

$$(**) \qquad y' = \boxed{\mathbf{53}}$$

が得られる．さらに，方程式 $(*)$ と $(**)$ から a を消去すると，微分方程式

$$y' = \boxed{\mathbf{54}}$$

が得られる．

$\boxed{\mathbf{53}}$ の解答群

⓪ ax　① ay　② $2ax$　③ $2ay$　④ $\dfrac{x}{a}$　⑤ $\dfrac{y}{a}$

⑥ $\dfrac{x}{2a}$　⑦ $\dfrac{y}{2a}$　⑧ $\dfrac{1}{ax}$　⑨ $\dfrac{1}{ay}$　ⓐ $\dfrac{1}{2ax}$　ⓑ $\dfrac{1}{2ay}$

$\boxed{\mathbf{54}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{y}{x}$　① $\dfrac{x}{y}$　② $\dfrac{y}{2x}$　③ $\dfrac{2x}{y}$

④ $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$　⑤ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$　⑥ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$　⑦ $2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

⑧ y^2　⑨ $\dfrac{y^2}{2}$　ⓐ $\dfrac{y^3}{x}$　ⓑ $\dfrac{y^3}{2x}$

計算用紙

第4分野　確率・統計

〔問 1 ～ 問 4 ： 解答番号 $\boxed{55}$ ～ $\boxed{72}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$，$V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　(1)　確率変数 X, Y の確率分布がそれぞれ，

X の値	-3	-2	0	2	3
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	a	$\frac{1}{6}$

Y の値	-6	-4	0	4	6
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	a	$\frac{1}{6}$

（a は定数）

で与えられているとき，$a = \boxed{55}$ であり，$E(X^2) = \boxed{56}$ である．また，Y と $2X$ の確率分布が等しくなることから，$V(Y) = \boxed{57}$ である．

$\boxed{55}$ ～ $\boxed{57}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

⑥ 2　⑦ 4　⑧ 6　⑨ 8　ⓐ 16　ⓑ 24

(2) 2つの事象 A, B に対し，事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．$P(B) = \dfrac{1}{8}$，$P(A|B) = P(A) = \dfrac{1}{4}$ とすると，A と B は $\boxed{\textbf{58}}$ から，$P(B|A) = \boxed{\textbf{59}}$ である．さらに，$P(A \cup B) = \boxed{\textbf{60}}$ である．

$\boxed{58}$ の解答群

⓪ 独立である　　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

$\boxed{59}$・$\boxed{60}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{32}$　③ $\dfrac{1}{8}$　④ $\dfrac{5}{32}$　⑤ $\dfrac{7}{32}$

⑥ $\dfrac{1}{4}$　⑦ $\dfrac{11}{32}$　⑧ $\dfrac{1}{2}$　⑨ $\dfrac{5}{8}$　ⓐ $\dfrac{3}{4}$

問 2 確率変数 X の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ が

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ (x+1)^2, & -1 \leqq x \leqq 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

で与えられているとき，$P\left(X > -\dfrac{1}{2}\right) = \boxed{\textbf{61}}$ である．また，確率密度関数を $f(x)$ とすると，

$$f(x) = \boxed{\textbf{62}}, \quad -1 < x < 0$$

で，$E(X) = \boxed{\textbf{63}}$ である．

61 の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$　⑥ 1

62 の解答群

⓪ $\dfrac{2}{3}(x+1)^3$　① $\dfrac{2}{3}(x+1)^3 - 1$　② $2(x+1)$

③ $2x+1$

63 の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$

⑥ $-\dfrac{1}{4}$　⑦ $-\dfrac{1}{3}$　⑧ $-\dfrac{1}{2}$　⑨ $-\dfrac{2}{3}$　ⓐ $-\dfrac{3}{4}$

計算用紙

問 3　3つの確率変数 X, Y, Z がすべて区間 $[-2, 4]$ 上の一様分布に従っているとする．このとき，$P(1 \leqq X \leqq 3) =$ $\boxed{\textbf{64}}$, $E(X) =$ $\boxed{\textbf{65}}$ である．X, Y, Z が互いに独立であるとし，この3つのうち区間 $[1, 3]$ 内に値をとるものの個数を N とすると，N は $\boxed{\textbf{66}}$ に従い，$P(N = 2) =$ $\boxed{\textbf{67}}$ である．

$\boxed{64}$ ・ $\boxed{65}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{3}{4}$

⑥ $\frac{1}{5}$　⑦ $\frac{2}{5}$　⑧ $\frac{3}{5}$　⑨ $\frac{4}{5}$　ⓐ 1　ⓑ 2

$\boxed{66}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 2項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

$\boxed{67}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{9}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{8}{9}$　⑤ $\frac{1}{3}$　⑥ $\frac{2}{3}$

計算用紙

問 4　B工場では，工作機械を用いてある製品を作っている．この機械で作られる製品の質量は平均 350 g，標準偏差 1 g の正規分布に従っていた．この工作機械を更新したので，更新前と同様の製品が作られているか調べることにした．

更新後の工作機械で作られる製品の質量は，平均 μ g，標準偏差 1 g の正規分布に従っているものとする．このとき，有意水準 3% として，

帰無仮説 H_0：$\mu = 350$,

対立仮説 H_1：$\mu \neq 350$

の両側検定を行う．更新後の機械で作られた製品の中から無作為に 36 個を取り出し，それらの質量を $X_1, X_2, \ldots, X_{36}$ とすると，標本平均

$$\overline{X} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} X_i$$

は平均 $\boxed{\mathbf{68}}$，標準偏差 $\boxed{\mathbf{69}}$ の $\boxed{\mathbf{70}}$ に従うので，帰無仮説 H_0 のもとでは，

$$Z = \frac{\overline{X} - 350}{\boxed{\mathbf{69}}}$$

は平均 0，標準偏差 $\boxed{\mathbf{71}}$ の正規分布に従う．したがって，正規分布表から $P(|Z| \geqq 2.17) \fallingdotseq 0.03$ がわかる．一方，取り出した 36 個の製品の質量を計測したところ，$\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 350.4$ g であったので，H_0 は有意水準 3% で $\boxed{\mathbf{72}}$ ．

$\boxed{\mathbf{68}}$ ・ $\boxed{\mathbf{69}}$ の解答群

⓪ 1　① μ　② 6　③ 6μ　④ 36　⑤ 36μ　⑥ $\frac{1}{36}$

⑦ $\frac{\mu}{36}$　⑧ $\frac{1}{6}$　⑨ $\frac{\mu}{6}$

$\boxed{\mathbf{70}}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

$\boxed{\mathbf{71}}$ **の解答群**

⓪ 0	① $\dfrac{1}{36}$	② $\dfrac{1}{18}$	③ $\dfrac{1}{9}$	④ $\dfrac{1}{6}$	⑤ 1
⑥ 2	⑦ 4	⑧ 6	⑨ 9	ⓐ 18	ⓑ 36

$\boxed{\mathbf{72}}$ **の解答群**

⓪ 棄却される　① 採択される