EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2013年12月14日（土）
4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．
(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．
(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(8) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(9) 問題冊子は持ち帰ること．
(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．
(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ には $\boxed{\textbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\textbf{23}}$ は $(\boxed{\textbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\textbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 6 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{18}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$，$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x = \boxed{\mathbf{1}}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x \to 0} x \cos \frac{\pi}{x} = \boxed{\mathbf{2}}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 5	④ -1	⑤ -2	⑥ -5
⑦ π	⑧ $\dfrac{\pi}{2}$	⑨ $-\pi$	ⓐ $-\dfrac{\pi}{2}$	ⓑ ∞	ⓒ $-\infty$	

解説

(1)　$h = x - \dfrac{\pi}{2}$ とおく．$x \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$h \to 0$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x &= \lim_{h \to 0} h \tan(h + \frac{\pi}{2}) \\
&= \lim_{h \to 0} h \frac{\sin(h + \frac{\pi}{2})}{\cos(h + \frac{\pi}{2})} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(-h \frac{\cos h}{\sin h}\right) \\
&= -\lim_{h \to 0} \cos h \frac{h}{\sin h} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

したがって，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ④ である．

(2) $\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| \leqq 1$ であるから,

$$0 \leqq \lim_{x \to 0}\left|x\cos\frac{\pi}{x}\right| \leqq \lim_{x \to 0}|x| = 0$$

したがって, $\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ⓪ である.

問 2　関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $\sin x$ のマクローリン展開（$x=0$ を中心とするテイラー展開）は

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots \qquad (\,|x|<1\,)\ ,$$

$$\sin x = \boxed{\mathbf{3}}$$

である．したがって，$\dfrac{\sin x}{1-x}$ のマクローリン展開を

$$\frac{\sin x}{1-x} = c_0+c_1\,x+c_2\,x^2+c_3\,x^3+\cdots \qquad (\,|x|<1\,)$$

とおくと $c_0=\boxed{\mathbf{4}}$，$c_1=1$，$c_2=1$，$c_3=\boxed{\mathbf{5}}$ である．

$\boxed{3}$ の解答群

⓪ $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

① $x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

② $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

③ $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

$\boxed{4}$・$\boxed{5}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ $\dfrac{2}{3}$　⑥ $\dfrac{4}{3}$

⑦ $\dfrac{2}{5}$　⑧ $\dfrac{4}{5}$　⑨ $\dfrac{7}{5}$　ⓐ $\dfrac{1}{6}$　ⓑ $\dfrac{5}{6}$　ⓒ $\dfrac{7}{6}$

解説

関数 $f(x)$ のマクローリン展開は，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

であり，$f(x) = \sin x$ の場合は，$f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ であるから

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

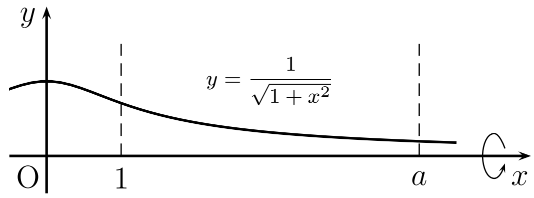
となる．したがって $\boxed{\mathbf{3}}$ の答えは ② である．

$|x| < 1$ の範囲では，級数 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ と級数 $\boxed{\mathbf{3}}$ はともに収束する．よって，$|x| < 1$ を満たすすべての x に対して

$$\begin{aligned}
\sin x \cdot \frac{1}{1-x} &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\
&= x + x^2 + \left(-\frac{1}{3!} + 1\right)x^3 + \left(-\frac{1}{3!} + 1\right)x^4 + \cdots \\
&= x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

したがって，$\boxed{\mathbf{4}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$ の答えはそれぞれ ⓪，ⓑ である．

問 3 定数 a は $a > 1$ を満たすとする．曲線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，直線 $x = 1$, $x = a$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V(a)$ は $V(a) = \boxed{\mathbf{6}}$ であり，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} V(a) = \boxed{\mathbf{7}}$ である．



$\boxed{\mathbf{6}}$ **の解答群**

- ⓪ $\dfrac{1}{1+a^2} - 1$
- ① $\log(1+a^2)$
- ② $\sin^{-1}\dfrac{1}{a}$
- ③ $\sin^{-1}\dfrac{1}{a} - \dfrac{\pi}{2}$
- ④ $\tan^{-1} a$
- ⑤ $\tan^{-1} a - \dfrac{\pi}{4}$
- ⑥ $\pi\left(\dfrac{1}{1+a^2} - 1\right)$
- ⑦ $\pi\log(1+a^2)$
- ⑧ $\pi\sin^{-1}\dfrac{1}{a}$
- ⑨ $\pi\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{a} - \dfrac{\pi}{2}\right)$
- ⓐ $\pi\tan^{-1} a$
- ⓑ $\pi\left(\tan^{-1} a - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{\mathbf{7}}$ **の解答群**

- ⓪ 0
- ① $\dfrac{1}{3}$
- ② $\dfrac{1}{2}$
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ 3
- ⑥ $\dfrac{\pi}{4}$
- ⑦ $\dfrac{\pi}{3}$
- ⑧ $\dfrac{\pi}{2}$
- ⑨ π
- ⓐ 2π
- ⓑ 3π
- ⓒ $\dfrac{\pi^2}{4}$
- ⓓ $\dfrac{\pi^2}{3}$
- ⓔ $\dfrac{\pi^2}{2}$
- ⓕ π^2
- ⓖ $2\pi^2$
- ⓗ $3\pi^2$

解説 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = \alpha$, $x = \beta$ $(\alpha < \beta)$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は

$$\pi\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)\}^2\,dx$$

である．したがって

$$V(a) = \pi \int_1^a \frac{dx}{1+x^2} = \pi \left[\tan^{-1} x\right]_1^a = \pi \left(\tan^{-1} a - \tan^{-1} 1\right)$$

である． ここで $\tan^{-1} 1$ とは $\tan\theta = 1$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ のことであるから，$\tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ である．したがって

$$V(a) = \pi \left(\tan^{-1} a - \frac{\pi}{4}\right)$$

であり， $\boxed{\mathbf{6}}$ の答えは ⓑ である．

また $\theta \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ のとき $\tan\theta \to \infty$ であるから $a \to \infty$ のとき $\tan^{-1} a \to \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ．したがって

$$\lim_{a\to\infty} V(a) = \lim_{a\to\infty} \pi \left(\tan^{-1} a - \frac{\pi}{4}\right) = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

であるから， $\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ⓒ である．

問 4　媒介変数表示で表される曲線 $x = \cos^3 t,\ y = 3\sin t - \sin^3 t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ の全長を L とおく.

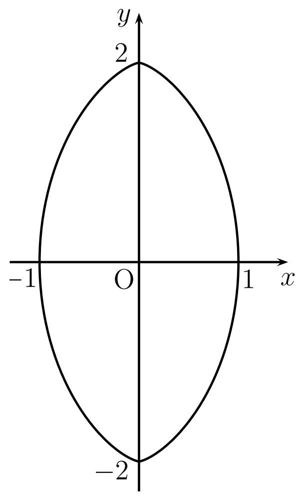
このとき,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \boxed{\mathbf{8}}\, dt$$

$$= \boxed{\mathbf{9}}$$

である.



$\boxed{\mathbf{8}}$ **の解答群**

⓪ $3\cos^4 t$	① $3\cos^3 t$	② $3\cos^2 t$	③ $3\cos t$
④ $9\cos^4 t$	⑤ $9\cos^3 t$	⑥ $9\cos^2 t$	⑦ $9\cos t$

$\boxed{\mathbf{9}}$ **の解答群**

⓪ 0					
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
⑦ π	⑧ 2π	⑨ 3π	ⓐ 4π	ⓑ 5π	ⓒ 6π

解説　L の式に $x = \cos^3 t$, $y = 3\sin t - \sin^3 t$ を代入して計算すると，

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\cos t - 3\sin^2 t \cos t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t \cos^4 t + 9\cos^2 t(1-\sin^2 t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t \cos^4 t + 9\cos^2 t \cos^4 t}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 3\cos^2 t\, dt \qquad \text{（よって，} \boxed{\mathbf{8}} \text{ の答えは ② である．）} \\
&= 3\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \\
&= 3\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

よって，$\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは⑨ である．

問 5　変数 $x,\ y$ の関数 $f(x,\ y)$ が

$$f(x,\ y) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 y + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 - 2y$$

で定義されているとする．

(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) = 0$ の解 $(x,\ y)$ をすべてあげると $(-2,\ -2)$, $\boxed{\mathbf{10}}$ である．これらが $f(x,\ y)$ の極値を与える点 $(x,\ y)$ の候補である．

(2)　点 $(-2,\ -2)$ については，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,\ -2)\ =\ \boxed{\mathbf{11}}\ <\ 0$ であり，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,\ -2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,\ -2) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2,\ -2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,\ -2) \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{12}}\ >\ 0$$

であるから，関数 $f(x,\ y)$ は点 $(-2,\ -2)$ で $\boxed{\mathbf{13}}$ ．

$\boxed{10}$ の解答群

⓪ $(0,\ 0)$　① $(1,\ 1)$　② $(-2,\ -3)$

③ $(0,\ -1)$, $(0,\ 2)$　④ $(0,\ -1)$, $(0,\ 0)$　⑤ $(-2,\ -3)$, $(0,\ 2)$

$\boxed{11}$ ・ $\boxed{12}$ の解答群

⓪ -5　① -4　② -3　③ -2　④ -1

⑤ 1　⑥ 2　⑦ 3　⑧ 4　⑨ 5

$\boxed{13}$ の解答群

⓪ 極大値をとる　① 極小値をとる　② 極値をとらない

解説

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を同時に満たす点 $(x,y)=(a,b)$ を停留点という．この問題の停留点は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\,y) &= \quad 2x^2-2xy \quad &= \ 0 \ \cdots \ (\sharp) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\,y) &= \ -x^2+y^2-y-2 \ &= \ 0 \ \cdots \ (\flat) \end{cases}$$

から求められる．まず，$(\sharp)$ は $x(x-y)=0$ と同等であるから $x=0$ または $x=y$ である．

$x=0$ のとき：$x=0$ を $(\flat)$ に代入すると，$y^2-y-2=0$ となり，$y=-1,\,2$．この場合は $(x,\,y)=(0,-1),\,(0,2)$ である．

$x=y$ のとき：$x=y$ を $(\flat)$ に代入すると，$-y-2=0$．この場合は $(x,\,y)=(-2,\,-2)$ である．

以上より，求める点 $(x,\,y)$ は $(0,\,-1),\,(0,\,2),\,(-2,\,-2)$ となり，$\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ③ である．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\,y)=4x-2y$ に $x=-2,\,y=-2$ を代入して，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,\,-2)=-4$．したがって，$\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ① である．

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,\,y)=-2x$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\,y)=2y-1$．ゆえに，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,\,-2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,\,-2) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-2,\,-2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,\,-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 4$$

したがって $\boxed{\mathbf{12}}$ の答えは ⑧ である．

一般に，$f(x,y)$ の停留点 (a,b) において次のことが成り立つ：
$A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,\,b)$，　$H=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,\,b)$，　$B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,\,b)$　とおき，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,\,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,\,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,\,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,\,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix} = AB-H^2$$

とする．

(D1) $AB - H^2 > 0$ のとき，

(i) $A > 0$ であれば，$f(x,\, y)$ は点 $(a,\, b)$ で極小になり，

(ii) $A < 0$ であれば，$f(x,\, y)$ は点 $(a,\, b)$ で極大になる．

(D2) $AB - H^2 < 0$ のとき，$f(x,\, y)$ は点 $(a,\, b)$ では極大にも極小にもならない．

この問題の場合は，点 $(-2,\, -2)$ において $A < 0$, $AB - H^2 > 0$ であるので，上の (D1) (ii) より，$f(x, y)$ は点 $(-2,\, -2)$ で極大値をとる．したがって，$\boxed{\mathbf{13}}$ の答えは ⓪ である．

問 6 xy 平面上の 3 点 $(0,0)$, (π,π), $(\pi,-\pi)$ を頂点とする三角形およびその内部を集合 D とするとき，重積分

$$\iint_D x\sin(x-y)\,dxdy$$

の値を求める．

集合 D は

$$D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq \boxed{\mathbf{14}},\ \ \boxed{\mathbf{15}} \leqq y \leqq \boxed{\mathbf{16}}\ \right\}$$

と表されるので，

$$\begin{aligned}\iint_D x\sin(x-y)\,dxdy &= \int_0^{\boxed{\mathbf{14}}}\left(\int_{\boxed{\mathbf{15}}}^{\boxed{\mathbf{16}}} x\sin(x-y)\,dy\right)dx \\ &= \int_0^{\boxed{\mathbf{14}}} \boxed{\mathbf{17}}\ dx = \boxed{\mathbf{18}}\end{aligned}$$

である．

$\boxed{14}$ ～ $\boxed{16}$ の解答群

⓪ $-\pi$　① $-\dfrac{\pi}{2}$　② 0　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ π

⑤ $x-y$　⑥ $x+y$　⑦ $-x$　⑧ x

$\boxed{17}$ の解答群

⓪ $x-x\cos x$　① $x+x\cos x$　② $x-x\sin x$

③ $x+x\sin x$　④ $x-x\cos 2x$　⑤ $-x+x\cos 2x$

⑥ $x-x\sin 2x$　⑦ $-x+x\sin 2x$

$\boxed{18}$ の解答群

⓪ $-\pi^2$　① $-\dfrac{\pi^2}{2}$　② $-\pi$　③ $-\dfrac{\pi}{2}$　④ 0

⑤ $\dfrac{\pi}{2}$　⑥ π　⑦ $\dfrac{\pi^2}{2}$　⑧ π^2

解説　集合 D は 3 直線 $x = \pi,\ y = x,\ y = -x$ で囲まれた図形であるから，

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq \pi,\ -x \leqq y \leqq x\}$$

と表せる．したがって，$\boxed{\mathbf{14}}$，$\boxed{\mathbf{15}}$，$\boxed{\mathbf{16}}$ の答えはそれぞれ ④，⑦，⑧ である．

積分の計算をしよう．被積分関数 $f(x, y) = x\sin(x - y)$ は x を定数と見做せば，y についての正弦関数の積分のみ考慮すればよいから，まず y に関して $y = -x$ から $y = x$ まで積分し，次に x に関して $x = 0$ から $x = \pi$ まで積分する方が楽であろう．実際，

$$\begin{aligned}
\iint_D x\sin(x-y)\,dxdy &= \int_0^{\pi}\left(\int_{-x}^{x} x\sin(x-y)\,dy\right)dx \\
&= \int_0^{\pi}\big[x\cos(x-y)\big]_{-x}^{x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi}\boxed{x(1-\cos 2x)}\,dx \\
&= \int_0^{\pi} x\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)'\,dx \\
&= \left[x\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)dx \\
&= \pi^2 - \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{2}}
\end{aligned}$$

したがって，$\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ④，$\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ⑦ である．

第２分野　線形代数

〔問１～問５：解答番号 $\boxed{\mathbf{19}}$ ～ $\boxed{\mathbf{36}}$ 〕

問１　(1)　ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に直交する単位ベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{19}} \\ \boxed{\mathbf{20}} \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

$\boxed{\mathbf{19}}$・$\boxed{\mathbf{20}}$ の解答群

⓪　0	①　1	②　2	③　3	④　4	⑤　5
⑥　6	⑦　7	⑧　8			

(2)　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{21}}$ である.

$\boxed{\mathbf{21}}$ の解答群

⓪　-6	①　-4	②　-2	③　0	④　2	⑤　4
⑥　6	⑦　8				

解説　(1)　ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に直交するベクトルを $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおけば，内積を取り

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -a + 3b + 2c = 0, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -b = 0$$

となることより，$a=2c, b=0$ ゆえ $\begin{pmatrix} 2c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$．これを正規化して $\pm\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．したがって $\boxed{\mathbf{19}}$， $\boxed{\mathbf{20}}$ の答えは，それぞれ ②, ⓪ である．

他の方法として，与えられた 2 本のベクトルの外積が，まさに 2 本のベクトルと直交するベクトルであるから，外積を求めて正規化することにより求めることができる．実際に計算すると，$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおいて

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \boldsymbol{i} \\ 3 & -1 & \boldsymbol{j} \\ 2 & 0 & \boldsymbol{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．

(2)　以下に行基本変形 (T1), $\cdots$, (T4) および「上三角行列の行列式の値 = 対角成分の積」を用いた計算の 1 例を示す．

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \underset{\text{(T1)}}{=\!=} 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{(T2)}}{=\!=} 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{(T3)}}{=\!=} -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{(T4)}}{=\!=} -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{(C)}}{=\!=} -4 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1)) = 4$$

(T1)　第 2 行から共通因子 6，第 3 行から 2，第 4 行から $\frac{1}{3}$ を括りだす．

(T2)　第 4 行に第 1 行の (-1) 倍を加える．

(T3)　第 2 行と第 3 行を交換する．

(T4)　第 4 行に第 2 行の (-1) 倍を加える．

(C) 対角成分をすべて掛け合わせる．

したがって， $\boxed{\textbf{21}}$ の答えは ⑤ である．

問 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の逆行列 A^{-1} は $\boxed{\textbf{22}}$ である.

$\boxed{\textbf{22}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ① $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B は $\boxed{\textbf{23}}$ である.

$\boxed{\textbf{23}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ① $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

解説　(1) 行基本変形の操作を何度か行い，$(A|E) \to \cdots\cdots \to (E|M)$ となったとき，M が A の逆行列である（E は 3 次の単位行列）．この問題の A については以下の通り．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(T1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{(T2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(T3)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(T1)　第 2 行に第 1 行の (-1) 倍を加え，次に第 3 行に第 1 行の (-2) 倍を加える．

(T2)　第 1 行に第 2 行の (-1) 倍を加える．

(T3)　第 2 行に第 3 行の (-1) 倍を加える．

最後の項が $(E|M)$ の形になった．よって，A の逆行列 A^{-1} は最後の項の M であるから，$\boxed{\mathbf{22}}$ の答えは ② である．

(2)

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ の両辺に左から A を掛けると

$$B = A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ゆえに，$\boxed{\mathbf{23}}$ の答えは ① である．

問 3　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 & \cdots\ (\text{第 1 式}) \\ 2x + 5y + 3z = b & \cdots\ (\text{第 2 式}) \\ x + y + az = 1 & \cdots\ (\text{第 3 式}) \end{cases}$$

について考える．ここで a, b は実数とし，方程式 $(*)$ の係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数（ランク）は 2 であるとする．

(1)　a の値は $\boxed{\mathbf{24}}$ である．

(2)　方程式 $(*)$ が解をもつのは $b = \boxed{\mathbf{25}}$ のときである．

(3)　A の階数が 2 であるから，$(*)$ が解をもつとき，ある 2 つの式から残りの 1 つの式が導かれる．例えば，第 1 式の $\boxed{\mathbf{26}}$ 倍と第 2 式の $\boxed{\mathbf{27}}$ 倍を加えると第 3 式を得る．

$\boxed{24}$ ～ $\boxed{27}$ の解答群

⓪ 0					
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4	ⓑ -5	ⓒ -6

解説　(1) 行基本変形の操作を行い，A を階段行列に変換する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{(\mathrm{T1})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\mathrm{T2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

(T1)　第 2 行に第 1 行の (-2) 倍を加え，第 3 行に第 1 行の (-1) 倍を加える．

(T2)　第 3 行に第 2 行を加える．

A の階数が 2 であることは，“ 階段 ”が 2 段ということであるから，$a - 3 = 0$，すなわち，$a = 3$．したがって，$\boxed{\mathbf{24}}$ の答えは ③ である．

(2) (1) と同じ基本変形を A の拡大係数行列に施す（(1) で求めた $a = 3$ を代入している）．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(\mathrm{T1})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b-2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(\mathrm{T2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$$

最後の項の 3 行目は $0x+0y+0z=b-2$ と同等であるから，$b-2=0$ でなければならない．また，このときは $(*)$ は明らかに解をもつ．したがって，$\boxed{\textbf{25}}$ の答えは ② である．

(3) (2) の変形は与えられた連立一次方程式 $(*)$ の次の変形に対応する．

$$\begin{cases} (\text{第 1 式}) \\ (\text{第 2 式}) \\ (\text{第 3 式}) \end{cases} \xrightarrow{(\mathrm{T1})} \begin{cases} (\text{第 1 式}) \\ (\text{第 2 式}) - 2(\text{第 1 式}) \\ (\text{第 3 式}) - (\text{第 1 式}) \end{cases} \xrightarrow{(\mathrm{T2})} \begin{cases} (\text{第 1 式}) \\ (\text{第 2 式}) - 2(\text{第 1 式}) \\ (\text{第 3 式})' \end{cases}$$

ただし，$(\text{第 3 式})' = \{(\text{第 3 式}) - (\text{第 1 式})\} + \{(\text{第 2 式}) - 2(\text{第 1 式})\}$ である．$(\text{第 3 式})' = 0$ であるから，$(\text{第 3 式}) = 3(\text{第 1 式}) - (\text{第 2 式})$ を得る．したがって，$\boxed{\textbf{26}}$，$\boxed{\textbf{27}}$ の答えはそれぞれ ③，⑦ である．

問 4　3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし}, a \text{ は定数})$$

について考える．

(1)　AB の行列式 $|AB|$ の値が 0 となるのは $a = \boxed{\mathbf{28}}$ のときである．

(2)　B の各列を順に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ とおくと $B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3)$ であり，$AB = (A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ A\boldsymbol{b}_3)$ と表せる．

さて，$a \neq \boxed{\mathbf{28}}$ のとき，ベクトル $A\boldsymbol{b}_1$，$A\boldsymbol{b}_2$，$A\boldsymbol{b}_3$ は 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において $\boxed{\mathbf{29}}$．一方，$a = \boxed{\mathbf{28}}$ のときは，

$$A\,\boldsymbol{b}_1 = c\,A\boldsymbol{b}_2 + d\,A\boldsymbol{b}_3$$

が成り立つ．ここで $c = \boxed{\mathbf{30}}$，$d = \boxed{\mathbf{31}}$ である．

$\boxed{28}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

$\boxed{29}$ の解答群

⓪ 1 次独立（線形独立）である　① 1 次従属（線形従属）である

$\boxed{30}$・$\boxed{31}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{3}$　⑥ $\frac{2}{3}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ $-\frac{1}{2}$　ⓐ $-\frac{3}{2}$　ⓑ $-\frac{1}{3}$　ⓒ $-\frac{2}{3}$

解説　(1) $|AB| = |A||B|$ が成り立つことを用いよう．$|A| = -7 \neq 0$ であるから，$|AB| = |A||B| = 0$ より，$|B| = 0$ である．簡単な計算で $|B| = 6 - 3a$．ゆえに，$a = 2$．したがって，$\boxed{\textbf{28}}$ の答えは ② である．

(2) $a \neq 2$ と $a = 2$ のそれぞれの場合について問われている．

$a \neq 2$ のとき：$|AB| \neq 0$ であるから，行列 AB は正則である．実数 k_1, k_2, k_3 が $k_1A\boldsymbol{b}_1 + k_2A\boldsymbol{b}_2 + k_3A\boldsymbol{b}_3 = \mathbf{0}$ を満たすとする．この式は

$$k_1A\boldsymbol{b}_1 + k_2A\boldsymbol{b}_2 + k_3A\boldsymbol{b}_3 = (A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ A\boldsymbol{b}_3)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．AB が正則であるから，$k_1 = k_2 = k_3 = 0$ が成り立つ．したがって，ベクトル $A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_3$ は 1 次独立となり，$\boxed{\textbf{29}}$ の答えは ⓪ である．

$a = 2$ のとき：明らかに $\boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$ が成り立つから，両辺に左から A をかけて，$A\boldsymbol{b}_1 = -A\boldsymbol{b}_2 + A\boldsymbol{b}_3$ と表せる．したがって，$\boxed{\textbf{30}}$，$\boxed{\textbf{31}}$ の答えはそれぞれ ⑦，① である．

問 5　2 次方程式 $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 10$ は，対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 9 & \boxed{\textbf{32}} \\ \boxed{\textbf{32}} & 6 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 9 & \boxed{\textbf{32}} \\ \boxed{\textbf{32}} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 10$$

と表すことができる．A の固有値は $\lambda_1 = \boxed{\textbf{33}}$, $\lambda_2 = 10$ であり，それぞれに対応する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{34}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{35}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる．これらを $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, $\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$ のように大きさ 1 に正規化し，第 1 列，第 2 列とする行列を $T = \left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} \ \ \dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}\right)$ とおく．変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

により方程式 $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 10$ は $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 10$ となる．方程式 $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 10$ の表す図形は $\boxed{\textbf{36}}$ である．

32 〜 35 の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ −1　⑧ −2　⑨ −3　ⓐ −4　ⓑ −5　ⓒ −6

36 の解答群

⓪ 楕円　① 放物線　② 双曲線

解説　一般に

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ \ y)\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} = x(ax+by)+y(bx+cy) = ax^2+2bxy+cy^2$$

であるから，$9x^2-4xy+6y^2$ を $(x\ \ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の形で表すには対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

とおけばよい．したがって $\boxed{\mathbf{32}}$ の答えは ⑧ である．

A の固有値を求めるために，固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ を解けば

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (9-\lambda)(6-\lambda)-(-2)(-2)=0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda^2-15\lambda+50=0$$

$$\Longrightarrow \quad (\lambda-5)(\lambda-10)=0 \qquad \therefore \lambda = 5,\ 10$$

したがって $\boxed{\mathbf{33}}$ の答えは ⑤ である．

固有値 $\lambda_1=5$ に対応する固有ベクトルを求めると

$$(A-5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $y=2x$．$x=c_1$ とおけば $y=2c_1$ であるから固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix}$．特に第 1 成分が 1 であるものは $c_1=1$ とおいて $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$．したがって $\boxed{\mathbf{34}}$ の答えは ② である．また求めた固有ベクトルを正規化すると $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$．

同様に固有値 $\lambda_2=10$ に対応する固有ベクトルを求めると

$$(A-10E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $x=-2y$. $y=c_2$ とおけば $x=-2c_2$ であるから固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. 特に第 2 成分が 1 であるものは $c_2=1$ とおいて $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. したがって $\boxed{\mathbf{35}}$ の答えは ⑧ である.

また，求めた固有ベクトルを正規化すると $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

以上より

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

であるが， 対称行列の相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交するので T の第 1 列と第 2 列は直交し，ともに大きさが 1 であるから T は直交行列である．したがって ${}^tT = T^{-1}$ であり，特に今の場合は $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす θ が取れるので

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となり，T は回転行列である．また T は固有ベクトルを並べた行列であるから

$${}^tTAT = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned} 9x^2 - 4xy + 6y^2 &= (x \ \ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^t\left\{ T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\} AT\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= (X \ Y)\,{}^tTAT\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= (X \ Y)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 5X^2 + 10Y^2 \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに 2 次曲線 $9x^2-4xy+6y^2=10$ は $5X^2+10Y^2=10$, つまり

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)^2+Y^2=1$$

に変換されるが，これは楕円を表す．したがって $\boxed{\mathbf{36}}$ の答えは⓪ である．

第３分野　常微分方程式

〔問１～問４：解答番号 $\boxed{\mathbf{37}}$ ～ $\boxed{\mathbf{50}}$〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．また，特殊解は特解ともいう．

問１ 微分方程式

$$(*) \quad y' - \frac{2}{x}y = x^3$$

の一般解を求める．

(1) 対応する同次方程式

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

の一般解は，C を任意定数とすると

$$(**) \quad y = C \ \boxed{\mathbf{37}}$$

と表される．

(2) $(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x) \cdot \boxed{\mathbf{37}}$ を $(*)$ に代入すると，

$$\frac{du}{dx} = \boxed{\mathbf{38}}$$

が得られる．この方程式の一般解を求めると，

$$u(x) = \boxed{\mathbf{39}}$$

であるので，$(*)$ の一般解は $y = \boxed{\mathbf{37}} \cdot \boxed{\mathbf{39}}$ である．

$\boxed{\mathbf{37}}$・$\boxed{\mathbf{38}}$ の解答群

⓪ x　① x^2　② $\log x$　③ $x \log x$　④ $\dfrac{1}{x}$　⑤ $\dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{\textbf{39}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{2}{x}+\tilde{C}$　① $\dfrac{x^2}{2}+\tilde{C}$　② $\log x+\tilde{C}$　③ $x\log x+\tilde{C}$

④ $2x+\tilde{C}x^2$　⑤ $\dfrac{x^4}{2}+\tilde{C}x^2$　⑥ $\dfrac{\log x}{x}+\dfrac{\tilde{C}}{x}$　⑦ $x\log x+\tilde{C}x$

⑧ $\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{\tilde{C}}{x}$　⑨ $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\tilde{C}}{x}$　ⓐ $\dfrac{\log x}{x^2}+\dfrac{\tilde{C}}{x^2}$

($\tilde{C}$ は任意定数)

解説　(1) 同次方程式 $y'-\dfrac{2}{x}y=0$ は変数分離形 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{x}y$ であるから

$$\int\frac{1}{y}\,dy=\int\frac{2}{x}\,dx$$

を計算して，

$$\log|y|=2\log|x|+c \qquad (c\text{ は任意定数})$$

を得る．これは $|y|=e^cx^2$ と表せるから，$y=Cx^2$ (C は任意定数) である．したがって，$\boxed{\textbf{37}}$ の答えは ① である．

(2)　C を定数ではなく，x の関数と考えて，$y=u(x)x^2$ を微分方程式 $(*)$ に代入する（定数変化法とよばれる）．

$$\begin{aligned}(*)\text{ の左辺 } &=(u(x)x^2)'-\frac{2}{x}u(x)x^2\\ &=u'(x)x^2+2xu(x)-2xu(x)\\ &=u'(x)x^2\end{aligned}$$

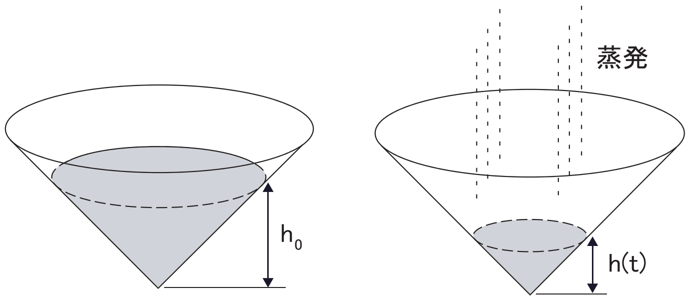
であるから，$u'(x)x^2=x^3$，つまり，$u'(x)=x$．したがって，$\boxed{\textbf{38}}$ の答えは ⓪ である．

また，$u'(x)=x$ の一般解は明らかに $u(x)=\dfrac{x^2}{2}+\tilde{C}$ ($\tilde{C}$ は任意定数)．よって，$\boxed{\textbf{39}}$ の答えは ① である．

問 2 下の左図のように，円錐を逆さにした形状の容器に揮発性の液体が底の頂点から高さ h_0 $(h_0 > 0)$ まで満たされている．時刻 $t = 0$ で容器上面のふたが外れて液体の気化による液面低下が始まる．液面の高さ $h(t)$ は，容器が設置された実験室の室温の時間周期変動を考慮して，微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dh}{dt} = -(1 - \sin t)\, h^2$$

に従い減少していくものとする．



(1) 初期条件 $h(0) = h_0$ のもとで微分方程式 $(*)$ の解 $h(t)$ を求めると，$h(t) =$ **40** であり，$h(t) > 0$ であることがわかる．

40 **の解答群**

⓪ $\dfrac{h_0}{(\sqrt{h_0}\,t + 1 - \sqrt{h_0} + \sqrt{h_0}\cos t)^2}$　① $\dfrac{h_0}{(\,t + 1 - \sin t)^2}$

② $\dfrac{h_0}{1 - h_0 + h_0 t + h_0 \cos t}$　③ $\dfrac{h_0}{1 + h_0 + h_0 t - h_0 \cos t}$

④ $\dfrac{h_0^2 + t + \sin t}{h_0}$　⑤ $\dfrac{h_0^2 - 1 + t + \cos t}{h_0}$

(2) 方程式 $(*)$ より $\dfrac{dh}{dt} = 0$ となる n 番目の時刻 T_n は，$T_n =$ **41** $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ であり，$h(T_n) =$ **42** となる．

$\boxed{41}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{n\pi}{2}$　① $\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\pi$　② $n\pi$

③ $\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$　④ $(2n-1)\pi$　⑤ $\left(2n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$

⑥ $\left(2n-\dfrac{3}{2}\right)\pi$

$\boxed{42}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{h_0}{(\sqrt{h_0}\,T_n+1-\sqrt{h_0})^2}$　① $\dfrac{h_0}{T_n^2}$

② $\dfrac{h_0}{1-h_0+h_0\,T_n}$　③ $\dfrac{h_0}{1+h_0+h_0\,T_n}$

④ $\dfrac{h_0^2+T_n+1}{h_0}$　⑤ $\dfrac{h_0^2+T_n-1}{h_0}$

解説　(1) 変数分離形の微分方程式 $\dfrac{dh}{dt}=-(1-\sin t)h^2$ の一般解を求め，初期条件 $h(0)=h_0$ を満たす解 $h(t)$ を求める．一般解は $\displaystyle\int\frac{1}{h^2}\,dh=\int-(1-\sin t)\,dt$ を計算して，

$$-\frac{1}{h}=-\cos t-t+c\qquad(c\text{ は任意定数})$$

ゆえに，$h(t)=\dfrac{1}{\cos t+t-c}$．初期条件 $h(0)=h_0$ を満たす c は $c=\dfrac{h_0-1}{h_0}$ であるから，

$$h(t)=\frac{1}{\cos t+t-c}=\frac{1}{\cos t+t-\dfrac{h_0-1}{h_0}}=\frac{h_0}{1-h_0+h_0t+h_0\cos t}$$

したがって，$\boxed{40}$ の答えは ② である．また，解 $h(t)$ の分母を $g(t)=1-h_0+h_0t+h_0\cos t$ とおくと，$g(0)=1$，$g'(t)=h_0(1-\sin t)\geqq 0$ であるから，$g(t)>0$．したがって $h(t)>0$ であることがわかる．

(2) $\dfrac{dh}{dt}=0$ と $h>0$ より，$-(1-\sin t)=0$ が成り立つ．$\sin t=1$ を満たす t は $t=\dfrac{\pi}{2}+2p\pi$ (p は整数) と表せ，$t\geqq 0$ の範囲では，$t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+4\pi,\ \ldots$ である．ゆえに $T_n=\dfrac{\pi}{2}+2(n-1)\pi=\left(2n-\dfrac{3}{2}\right)\pi$．したがって，$\boxed{41}$ の答えは ⑥ であ

る．このとき，$\cos T_n = 0$ だから

$$h(T_n) = \frac{h_0}{1 - h_0 + h_0 T_n + h_0 \cos T_n} = \frac{h_0}{1 - h_0 + h_0 T_n}$$

したがって， $\boxed{\textbf{42}}$ の答えは ② である．

問 3 次の 5 つの微分方程式を考える．

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & y'' - 2y' + 3y = 0 \\
\text{(ii)} & y'' - 5y' + 6y = 0 \\
\text{(iii)} & y'' + 2y' - 6y = 0 \\
\text{(iv)} & y'' - 4y' + 4y = 0 \\
\text{(v)} & y'' - 7y' + 12y = 0
\end{array}
$$

このうち e^{3x} を解としてもつ方程式をすべてあげると $\boxed{\mathbf{43}}$ であり，$e^x \cos\sqrt{2}x$ を解としてもつ方程式をすべてあげると $\boxed{\mathbf{44}}$ である．
また， xe^{ax} (a は定数) の形の解をもつ方程式は 1 つのみで $\boxed{\mathbf{45}}$ である．このとき $a = \boxed{\mathbf{46}}$ であり，一般解は $\boxed{\mathbf{47}}$ である．

$\boxed{\mathbf{43}}$ ～ $\boxed{\mathbf{45}}$ の解答群

⓪ (i)　① (ii)　② (iii)　③ (iv)　④ (v)

⑤ (i)，(ii)　⑥ (ii)，(iii)　⑦ (ii)，(v)

⑧ (iii)，(iv)　⑨ (iii)，(v)　ⓐ (iv)，(v)

ⓑ (i)，(ii)，(iii)　ⓒ (i)，(iii)，(v)

ⓓ (ii)，(iii)，(iv)　ⓔ (ii)，(iii)，(v)

$\boxed{\mathbf{46}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

$\boxed{\mathbf{47}}$ の解答群

⓪ $(A + Bx)e^{-x}$　① $(Ax + Bx^2)e^{-x}$　② $(A + Bx)e^{x}$

③ $(Ax + Bx^2)e^{x}$　④ $(A + Bx)e^{2x}$　⑤ $(Ax + Bx^2)e^{2x}$

(A, B は任意定数)

解説　b, c を実定数とする．微分方程式

$$y'' + by' + cy = 0$$

に対し，

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

をその微分方程式の特性方程式という．この問題の微分方程式 (i)〜(v) それぞれの特性方程式とその解，および微分方程式の一般解は次の通り．

(i) $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$,　$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}\,i$. このとき一般解は $y = e^x(A\cos\sqrt{2}x + B\cos\sqrt{2}x)$.

(ii) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$,　$\lambda = 2, 3$. このとき一般解は $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$.

(iii) $\lambda^2 + 2\lambda - 6 = 0$,　$\lambda = -1 \pm \sqrt{7}$. このとき一般解は $y = Ae^{(-1+\sqrt{7})x} + Be^{(-1-\sqrt{7})x}$.

(iv) $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$,　$\lambda = 2$ (重解). このとき一般解は $y = (A + Bx)e^{2x}$.

(v) $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$,　$\lambda = 3, 4$. このとき一般解は $y = Ae^{3x} + Be^{4x}$.

したがって e^{3x} を解としてもつ方程式は (ii), (v) であるから $\boxed{\textbf{43}}$ の答えは ⑦ である．

次に，$e^x \cos\sqrt{2}\,x$ を解としてもつ方程式は (i) のみである．したがって $\boxed{\textbf{44}}$ の答えは ⓪ である．

また，xe^{ax} の形の解をもつ方程式は，特性方程式が重解をもつということだから，(iv) のみである．したがって，$\boxed{\textbf{45}}$ の答えは ③ であり，このとき $a = 2$ であるから $\boxed{\textbf{46}}$ の答えは ② であり，一般解は $(A + Bx)e^{2x}$ であるから $\boxed{\textbf{47}}$ の答えは ④ である．

問 4　微分方程式

$$(*)\qquad y'' - 2y' + y = e^{3x}$$

の一般解を求める．関数 $z(x)$ に対して，$L(z)$ を

$$L(z) = \frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx} + z$$

で定義すると，$(*)$ は

$$L(y) = e^{3x}$$

と表すことができる．ここで，任意の定数 α について

$$L(e^{\alpha x}) = P(\alpha)e^{\alpha x}$$

が成り立つのは，$P(\alpha) = \boxed{\mathbf{48}}$ のときである．$P(3) = \boxed{\mathbf{49}} \neq 0$ であるから

$$L\left(\frac{1}{P(3)}e^{3x}\right) = e^{3x}$$

となる．したがって $\dfrac{1}{P(3)}e^{3x}$ は $(*)$ の特殊解である．ゆえに $(*)$ の一般解は

$$y = \frac{1}{P(3)}e^{3x} + \boxed{\mathbf{50}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{48}}$ の解答群

⓪　0

①　α　　②　$-\alpha$　　③　$\alpha - 2$

④　$-2\alpha + 1$　　⑤　$\alpha^2 + 2\alpha + 1$　　⑥　$-\alpha^2 + 2\alpha + 1$

⑦　$\alpha^2 - 2\alpha + 1$　　⑧　$\alpha^2 + 2\alpha - 1$　　⑨　$\alpha^2 - 2\alpha - 1$

$\boxed{\mathbf{49}}$ の解答群

⓪　0

①　1　　②　2　　③　3　　④　4　　⑤　5　　⑥　6

⑦　-1　　⑧　-2　　⑨　-3　　ⓐ　-4　　ⓑ　-5　　ⓒ　-6

$\boxed{\mathbf{50}}$ **の解答群**

⓪ $(A+Bx)e^{-x}$　① $(A+Bx)e^{x}$　② $Ae^{x}+Be^{2x}$

③ $Ae^{-x}+Be^{2x}$　④ $Ae^{x}+Be^{-2x}$　⑤ $Ae^{-x}+Be^{-2x}$

(A, B は任意定数)

解説　$L(e^{\alpha x})$ を計算すると

$$L(e^{\alpha x}) = (e^{\alpha x})'' - 2(e^{\alpha x})' + e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x} - 2\alpha e^{\alpha x} + e^{\alpha x} = (\alpha^2 - 2\alpha + 1)e^{\alpha x}$$

したがって，$P(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1$ であるから $\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは ⑦ である．また $P(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$ であるから $\boxed{\mathbf{49}}$ の答えは ④ である．

以上より

$$L(e^{3x}) = P(3)e^{3x} = 4e^{3x}$$

が成り立つが，L は線形，つまり $L(c_1 z_1 + c_2 z_2) = c_1 L(z_1) + c_2 L(z_2)$ を満たすので，両辺を $P(3) = 4$ で割って

$$L\left(\frac{1}{P(3)}e^{3x}\right) = L\left(\frac{1}{4}e^{3x}\right) = e^{3x}$$

を得る．これは $\dfrac{1}{4}e^{3x}$ が $(*)$ の特殊解であることを示している．

最後に $(*)$ に対応する同次方程式 (補助方程式) $y'' - 2y' + y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ であり，これを解いて $\lambda = 1$ (重解)．したがって，補助方程式の一般解は $(A+Bx)e^{x}$ となり，$\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは ① である．

第4分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{51}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{67}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ X の期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1 (1) 1 から 6 の各目が等確率で出るさいころを 2 回投げる．このとき出る目の最大値を X とすると，X が 4 となる確率 $P(X=4)$ は $\boxed{\mathbf{51}}$ である．

$\boxed{\mathbf{51}}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{36}$	① $\frac{5}{36}$	② $\frac{7}{36}$	③ $\frac{11}{36}$	④ $\frac{13}{36}$
⑤ $\frac{1}{18}$	⑥ $\frac{5}{18}$	⑦ $\frac{7}{18}$	⑧ $\frac{11}{18}$	⑨ $\frac{13}{18}$
ⓐ $\frac{1}{12}$	ⓑ $\frac{5}{12}$	ⓒ $\frac{7}{12}$	ⓓ $\frac{1}{9}$	ⓔ $\frac{5}{9}$

(2) X と Y が独立な確率変数で，それぞれの期待値が $E(X)=2$, $E(Y)=3$ のとき $E(2X+3XY-4Y+2)=$ $\boxed{\mathbf{52}}$ である．さらに， X^2 の期待値が $E(X^2)=9$ で， Y の分散が $V(Y)=3$ ならば，$V(X+Y)=$ $\boxed{\mathbf{53}}$ である．

$\boxed{\mathbf{52}}$ ・ $\boxed{\mathbf{53}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9
ⓐ 10	ⓑ 11	ⓒ 12	ⓓ 13	ⓔ 14

解説　(1) サイコロを 2 回投げた時の出る目は

$$\begin{array}{lll} (1,1), & \ldots, & (1,6), \\ (2,1), & \ldots, & (2,6), \\ \vdots & & \vdots \\ (6,1) & ,\ldots, & (6,6) \end{array}$$

の 36 通りである．したがって，それぞれの起こる確率は等しく $\dfrac{1}{36}$ である．このうち 1 回目と 2 回目の最大値が 4 となるのは

$$(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (1,4),\ (2,4),\ (3,4)$$

の 7 通りであるから，求める確率は

$$P(X=4)=\frac{7}{36}$$

したがって $\boxed{\mathbf{51}}$ の答えは ② である．

(2) 確率変数 X, Y は独立であるから $E(XY)=E(X)E(Y)$ が成り立つ．ゆえに

$$\begin{aligned} E(2X+3XY-4Y+2) =& 2E(X)+3E(XY)-4E(Y)+2 \\ =& 2E(X)+3E(X)E(Y)-4E(Y)+2 \\ =& 2\times 2+3\times 2\times 3-4\times 3+2 \\ =& 12 \end{aligned}$$

である．したがって $\boxed{\mathbf{52}}$ の答えは ⓒ である．

次に $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=9-2^2=5$ であることと $V(Y)=3$ に注意する．X, Y が独立であるから

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=5+3=8$$

したがって $\boxed{\mathbf{53}}$ の答えは ⑧ である．

問2　2つの事象 A, B に対して，

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = c, \quad P(A \cup B) = \frac{7}{9} \qquad (c \text{ は定数})$$

とする．

(1)　このとき，$P(A \cap B) = \boxed{\textbf{54}}$ である．したがって，事象 A と事象 B が独立になるのは $c = \boxed{\textbf{55}}$ のときである．

(2)　事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．$c = \dfrac{5}{9}$ であるとき $P(A|B) = \boxed{\textbf{56}}$ である．

54 の解答群

⓪ $\dfrac{1}{3} - c$　① $\dfrac{4}{9} - c$　② $c - \dfrac{4}{9}$　③ $c + \dfrac{1}{3}$

55 の解答群

⓪ $\dfrac{1}{6}$　① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{2}{5}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ 1

56 の解答群

⓪ $\dfrac{1}{16}$　① $\dfrac{1}{9}$　② $\dfrac{1}{8}$　③ $\dfrac{1}{6}$　④ $\dfrac{1}{5}$

⑤ $\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{1}{2}$　⑦ $\dfrac{2}{5}$　⑧ $\dfrac{2}{3}$　⑨ $\dfrac{3}{4}$

解説　(1)　確率の基本的な性質 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ より

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + c - \frac{7}{9} = c - \frac{4}{9}$$

であるから，$\boxed{\textbf{54}}$ の答えは ② である．また，事象 A と事象 B が独立になるのは $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つときであるから，

$$c - \frac{4}{9} = \frac{1}{3}c \qquad \therefore\ c = \frac{2}{3}$$

が成り立つ．したがって，$\boxed{\textbf{55}}$ の答えは ④ である．

(2) 条件付き確率の定義式に $c = \dfrac{5}{9}$ を代入して，直ちに

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{c - \dfrac{4}{9}}{c} = \frac{\dfrac{1}{9}}{\dfrac{5}{9}} = \frac{1}{5}$$

を得る．したがって，$\boxed{\mathbf{56}}$ の答えは ④ である．

問 3 ある工場において，製品が 1 日 N 個生産されている．1 日に出る不良品の個数を X_N とすると，X_N は平均 2 の二項分布 $B\left(N, \dfrac{2}{N}\right)$ に従っていた．例えば，$P(X_{100}=1) = \boxed{\textbf{57}}$ であり，これを計算すると $0.27065\cdots$ となる．
一般に，$k\ (=0,1,2,\ldots)$ に比べて N が十分大きいとき，$P(X_N=k)$ は

$$P(X=k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2}$$

で近似できる．ここで，確率変数 X は平均 2 の $\boxed{\textbf{58}}$ に従う．例えば，$k=1$ とすると $P(X=1) = 2e^{-2} = 0.27067\cdots$ となり，上の $P(X_{100}=1)$ とほぼ一致することがわかる．
なお，$V(X)$ は $\displaystyle\lim_{N\to\infty} V(X_N)$ に等しく，その値は $\boxed{\textbf{59}}$ である．

$\boxed{57}$ の解答群

⓪ 0.99^{99}　① 0.01×0.99^{99}　② 2×0.99^{99}　③ 4×0.99^{99}
④ 0.98^{99}　⑤ 0.02×0.98^{99}　⑥ 2×0.98^{99}　⑦ 4×0.98^{99}

$\boxed{58}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 正規分布　② 指数分布
③ ポアソン分布　④ t 分布　⑤ カイ 2 乗分布

$\boxed{59}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4
⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{1}{4}$
⑧ e　⑨ e^2　ⓐ e^{-1}　ⓑ e^{-2}　ⓒ ∞

解説　n は自然数，p は $0<p<1$ を満たす数とする．平均が np の二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 Y について，$Y=k$ となる確率は

$$P(Y=k) = {}_nC_k\, p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,\ldots,n) \quad \cdots \quad (*)$$

で与えられる．$Y = X_{100}$, すなわち $n = 100$, $p = \dfrac{2}{100}$ のとき

$$P(X_{100} = 1) = {}_{100}C_1 \, \frac{2}{100} \left(\frac{98}{100} \right)^{99} = 2 \times 0.98^{99}$$

であるから，$\boxed{\textbf{57}}$ の答えは ⑥ である．

λ を正の数とする．確率変数 Z が

$$P(Z = k) = \frac{\lambda^k}{k\,!} \, e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \quad \cdots \quad (\dagger)$$

を満たすとき，Z は平均 λ (あるいはパラメータ λ) のポアソン分布 $Po(\lambda)$ に従うという．この問題の X はポアソン分布 $Po(2)$ に従っているので，$\boxed{\textbf{58}}$ の答えは ③ である．

一般に，平均 np を一定値 λ に保ったまま n を大きくすると (すなわち p を小さくすると)，二項分布の確率 $(*)$ はポアソン分布の確率 $(\dagger)$ で近似できる (ただし，k は n に比べて十分小さくないといけない)．

二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 Y に対し，$V(Y) = np(1 - p)$ である．したがって，$B\left(N, \dfrac{2}{N}\right)$ に従う確率変数 X_N に対しては

$$V(X_N) = N \frac{2}{N} \left(1 - \frac{2}{N} \right) = 2 \left(1 - \frac{2}{N} \right)$$

が成り立ち，$\displaystyle\lim_{N \to \infty} V(X_N) = 2$ を得る．よって，$\boxed{\textbf{59}}$ の答えは ② である．

なお，$V(X) = 2$ は，ポアソン分布 $Po(\lambda)$ の平均と分散が λ に等しいことを知っていれば，$V(X_N)$ を経由せずにすぐに導かれる．

問 4　a を定数とする．確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ ax(2-x) & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (x > 2) \end{cases}$$

で与えられている．このとき $a = \boxed{\mathbf{60}}$ であり，$E(X) = \boxed{\mathbf{61}}$ である．また，X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると，

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \boxed{\mathbf{62}} & (0 \leqq x \leqq 2) \\ \boxed{\mathbf{63}} & (x > 2) \end{cases}$$

である．

$\boxed{\mathbf{60}}$ ・ $\boxed{\mathbf{61}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\dfrac{5}{4}$　⑥ 2

$\boxed{\mathbf{62}}$ ・ $\boxed{\mathbf{63}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\dfrac{5}{4}$　⑥ 2

⑦ $\dfrac{x(2-x)}{4}$　⑧ $\dfrac{x(2-x)}{2}$　⑨ $\dfrac{3x(2-x)}{4}$　ⓐ $x(2-x)$

ⓑ $\dfrac{x^2(3-x)}{12}$　ⓒ $\dfrac{x^2(3-x)}{6}$　ⓓ $\dfrac{x^2(3-x)}{4}$　ⓔ $\dfrac{x^2(3-x)}{3}$

解説　確率密度関数は $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ を満たす．与えられた関数がこの等式を満たすように a を定めよう．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_0^2 ax(2-x)\,dx \\ &= a\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx \\ &= a\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}a\end{aligned}$$

である．よって $\dfrac{4}{3}a = 1$ となり，$a = \dfrac{3}{4}$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{60}}$ の答えは ③ である．

期待値 $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ を計算する．ただし $a = \dfrac{3}{4}$ を $f(x)$ に代入していることに注意しよう．

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^2 \frac{3}{4}x^2(2-x)\,dx \\
&= \frac{3}{4}\int_0^2 (-x^3 + 2x^2)\,dx \\
&= \frac{3}{4}\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1
\end{aligned}
$$

よって，$\boxed{\mathbf{61}}$ の答えは ④ である．

分布関数 $F(x)$ を定義式 $F(x) = P(X \leqq x)$ にしたがって確率密度関数 $f(x)$ を用いて計算しよう．

まず $0 \leqq x \leqq 2$ のとき：

$$
F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{3}{4}t(2-t)\,dt = \frac{3}{4}\left[-\frac{t^3}{3} + t^2\right]_0^x = \frac{x^2(3-x)}{4}
$$

よって，$\boxed{\mathbf{62}}$ の答えは ⓓ である．

$x > 2$ のとき：

$$
F(x) = \int_{-\infty}^{2} f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{2} f(t)\,dt = 1
$$

よって，$\boxed{\mathbf{63}}$ の答えは ④である．

問 5　A大学の学生 100 人を無作為に選び，1 日にテレビを視聴する時間を尋ねたところ，その結果は平均 156 分で，標準偏差は 75 分であった．A大学の学生全体のテレビ平均視聴時間を μ 分，標準偏差を σ 分とする．このとき μ に対する信頼度 95% の信頼区間を求めるために，次のように考えた．

100 人の学生それぞれのテレビ視聴時間を $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とおくと，これらは，すべて独立で平均 μ，標準偏差 σ の確率変数であるから

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は平均 $\boxed{\mathbf{64}}$，標準偏差 $\boxed{\mathbf{65}}$ の確率変数となる．

標本の大きさは 100 であり十分大きいので，$\overline{X}$ は正規分布に従うとしてよく，さらに $\sigma = 75$ としてよいので，確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\mathbf{66}}}$$

の分布は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．

さて，正規分布表によれば $\displaystyle\int_{-1.96}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0.95$ であるから

$$\begin{aligned} 0.95 &= P\left(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96\right) \\ &= P\left(-1.96 \times \boxed{\mathbf{66}} \leqq \overline{X} - \mu \leqq 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}}\right) \\ &= P\left(\overline{X} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}}\right) \end{aligned}$$

を得る．したがって，$\overline{X}$ の実現値を $\overline{x}$ とすると，μ に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\overline{x} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}},\ \overline{x} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}}\right]$$

である．$\overline{x}$ に値 156 を代入し，小数点以下第 1 位を四捨五入すれば，信頼区間は $\boxed{\mathbf{67}}$ である．

$\boxed{\mathbf{64}}$ の解答群

⓪ 0　　① 1　　② μ　　③ 2μ　　④ μ^2　　⑤ $2\mu^2$

$\boxed{\mathbf{65}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② σ　③ 2σ

④ $\dfrac{\sigma}{10}$　⑤ $\dfrac{\sigma}{100}$　⑥ $\dfrac{\sigma^2}{10}$　⑦ $\dfrac{\sigma^2}{100}$

$\boxed{\mathbf{66}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 75　③ 75^2

④ $\dfrac{75}{10}$　⑤ $\dfrac{75^2}{10}$　⑥ $\dfrac{75}{100}$　⑦ $\dfrac{75^2}{100}$

$\boxed{\mathbf{67}}$ **の解答群**

⓪ $\left[141, 155\right]$　① $\left[141, 157\right]$　② $\left[141, 171\right]$

③ $\left[155, 157\right]$　④ $\left[155, 171\right]$

解説　確率変数の平均 (または期待値とも言う) については等式

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

が成り立つ．これを利用すれば

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) =& E\left(\frac{1}{100}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100})\right) \\ =& \frac{1}{100}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}) \\ =& \frac{1}{100}\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{100})\} \end{aligned}$$

となるが，$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_{100}) = \mu$ であるから，

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{100}100\mu = \mu$$

したがって，$\boxed{\mathbf{64}}$ の答えは ② である．

次に，確率変数の分散については，X, Y が独立な場合，等式

$$V(aX + bY + c) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

が成り立つ．これを利用すると

$$
\begin{aligned}
V(\overline{X}) =& V\left(\frac{1}{100}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100})\right) \\
=& \frac{1}{100^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}) \\
=& \frac{1}{100^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_{100})\}
\end{aligned}
$$

となるが，$V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_{100}) = \sigma^2$ であるから，

$$
V(\overline{X}) = \frac{1}{100^2} 100\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{100}
$$

となる．したがって $\overline{X}$ の標準偏差は $\sqrt{V(\overline{X})} = \dfrac{\sigma}{10}$ であり，$\boxed{\mathbf{65}}$ の答えは ④ である．

$\overline{X}$ を平均 0, 標準偏差 1 に変形するには

$$
Z = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{V(\overline{X})}}
$$

とすればよい．この場合 $E(\overline{X}) = \mu$, $\sqrt{V(\overline{X})} = \dfrac{\sigma}{10}$ であり，特に $\sigma = 75$ としてよいので

$$
Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{10}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{75}{10}}
$$

である．したがって $\boxed{\mathbf{66}}$ の答えは ④ である．

最後に μ に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$
\begin{aligned}
&\left[\overline{X}\text{ の実現値} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}}\,,\ \overline{X}\text{ の実現値} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}}\,\right] \\
=&\left[156 - 1.96 \times \frac{75}{10},\ 156 + 1.96 \times \frac{75}{10}\right] \\
=&\left[156 - \frac{147}{10},\ 156 + \frac{147}{10}\right] \\
=&[141.3,\ 170.7]
\end{aligned}
$$

ここで 141.3, 170.7 の小数点以下第 1 位をそれぞれ四捨五入して [141, 171] を得る．したがって $\boxed{\mathbf{67}}$ の答えは ② である．