

EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2012年12月8日（土）

4分野受験 午後1時30分～午後4時10分

3分野受験 午後1時30分～午後3時30分

2分野受験 午後1時30分～午後2時50分

1分野受験 午後1時30分～午後2時10分

* 受験分野は、各大学の指示に従ってください。

受験上の注意

- (1) 机の右上に学生証を提示すること。
- (2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
- (3) 開始の合図の後、表紙裏の**解答上の注意**を読むこと。
- (4) 問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- (5) マークには**HB または B の鉛筆**（またはシャープペンシル）を使用すること。
- (6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること。
- (7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離さないこと。
- (8) 試験開始40分後から退室を認める。
- (9) 問題冊子は持ち帰ること。
- (10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること。
- (11) その他、監督者の指示に従うこと。

解答上の注意

- (1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること。ただし、解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には⑩をマークすること。例えば、**23** と表示してある問いに対して解答記号Ⓒを選ぶ場合は、次のようにマークすること。

23	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ	Ⓗ	Ⓘ	Ⓚ	●	Ⓛ	Ⓜ	Ⓨ	Ⓩ	ⓐ	ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ	Ⓗ	Ⓘ
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- (2) 破線で囲まれた番号は、前に現れた番号であることを表す。したがって、例えば **23** には **23** と同じ解答が入る。
- (3) 解答が数式の場合、**23** は (**23**) という意味である。したがって、例えば **23** の解答が $-x-1$ の場合、 $x^2 - \mathbf{23}$ は $x^2 - (-x-1)$ を意味する。
- (4) \mathbb{R} は実数全体の集合とする。
- (5) $\log x$ は x の自然対数とする。

目次

第1分野	微分積分	3
第2分野	線形代数	11
第3分野	常微分方程式	21
第4分野	確率・統計	31

第1分野 微分積分

[問 1 ~ 問 6 : 解答番号 1 ~ 19]

(注意) $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ は, それぞれ $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ と書き表されることもある. 各逆関数がかかる値の範囲 (値域) は, $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi, -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ とする.

問 1 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \text{1}$ である.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x + \sin x} = \text{2}$ である.

1 ・ 2 の解答群

- ① 0
 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2 ⑥ 4 ⑦ ∞
 ⑧ $-\frac{1}{4}$ ⑨ $-\frac{1}{2}$ ⑩ -1 ⑪ -2 ⑫ -4 ⑬ $-\infty$

(3) 自然対数の底 e は, n を自然数とする数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ の極限として導かれる. すなわち, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ である. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \text{3}$$

である.

3 の解答群

- ① 0 ② 1 ③ ∞ ④ $-\infty$
 ⑤ e ⑥ e^{-1} ⑦ $e^{\frac{1}{2}}$ ⑧ $e^{-\frac{1}{2}}$ ⑨ e^2 ⑩ e^{-2}

問 2 実数全体で定義された 5 個の関数

$$f_1(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}, \quad f_2(x) = \log(ax^2+b), \quad f_3(x) = e^{-ax^2+bx}$$

$$f_4(x) = \tan^{-1}(ax+b), \quad f_5(x) = e^{-x} \sin(ax^2+b)$$

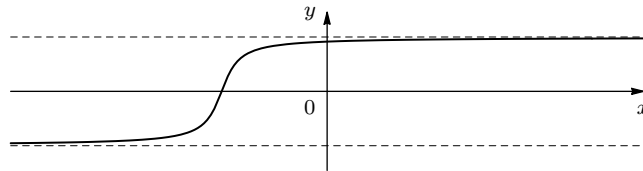
を考える. ただし, a, b は正の定数とする.

(1) 正数 a, b の値に関係なくすべての x について正の値をとる関数の組は 4.

(2) 有界な関数の組は 5.

(注意: 関数 $g(x)$ が有界であるとは, 適当に正数 M を選べばすべての x について $|g(x)| < M$ となることである.)

(3) 関数のグラフの概形が, 十分広い区間で下図のようになりえる関数の組は 6.



(破線 --- はグラフの漸近線を表す)

4 ~ 6 の解答群

① 存在しない

① $\{f_1\}$ ② $\{f_2\}$ ③ $\{f_3\}$ ④ $\{f_4\}$ ⑤ $\{f_5\}$

⑥ $\{f_1, f_2\}$ ⑦ $\{f_1, f_3\}$ ⑧ $\{f_1, f_4\}$ ⑨ $\{f_1, f_5\}$

⑩ $\{f_2, f_3\}$ ⑪ $\{f_2, f_4\}$ ⑫ $\{f_3, f_4\}$ ⑬ $\{f_4, f_5\}$

⑭ $\{f_1, f_3, f_4\}$ ⑮ $\{f_1, f_3, f_5\}$ ⑯ $\{f_1, f_4, f_5\}$ ⑰ $\{f_3, f_4, f_5\}$

問3 関数 $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ を $x=0$ の近くで2次多項式 $p(x) = 1 + c_1x + c_2x^2$ によって近似する.

$$f'(x) = \boxed{7}, \quad f''(x) = \boxed{8}$$

であるからマクローリン展開 ($x=0$ を中心とするテイラー展開) を利用すると $c_1 = \boxed{9}$, $c_2 = \boxed{10}$ となる.

7 ・ **8** の解答群

- | | | |
|------------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|
| ① $\frac{2(1+2x)}{(1+x+x^2)^{1/2}}$ | ④ $\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^{1/2}}$ | ⑦ $\frac{1+2x}{2(1+x+x^2)^{1/2}}$ |
| ③ $\frac{3}{(1+x+x^2)^{3/2}}$ | ⑤ $\frac{3}{2(1+x+x^2)^{3/2}}$ | ⑧ $\frac{3}{4(1+x+x^2)^{3/2}}$ |
| ⑥ $\frac{2(1-2x-2x^2)}{(1+x+x^2)^{3/2}}$ | ② $\frac{1-2x-2x^2}{2(1+x+x^2)^{3/2}}$ | ⑨ $\frac{1-2x-2x^2}{4(1+x+x^2)^{3/2}}$ |

9 ・ **10** の解答群

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | |
| ⑤ $\frac{1}{2}$ | ⑥ $\frac{3}{2}$ | ⑦ $\frac{1}{4}$ | ⑧ $\frac{3}{4}$ | ⑨ $\frac{1}{6}$ |
| ⑩ $\frac{1}{8}$ | ⑪ $\frac{3}{8}$ | ⑫ $\frac{1}{16}$ | ⑬ $\frac{3}{16}$ | |

計算用紙

問4 a を 0 でない定数とするとき、不定積分 $I = \int e^{ax} \sin x dx$ を計算する。

$$I = \boxed{11} - \frac{1}{a} \int e^{ax} \cos x dx$$

$$= \boxed{11} + \boxed{12} - \frac{1}{a^2} I$$

より

$$I = \boxed{13} \quad (\text{積分定数は省略})$$

となる。

11 ・ **12** の解答群

- | | | | |
|--------------------|---------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| ① $e^{ax} \sin x$ | ② $ae^{ax} \sin x$ | ③ $\frac{1}{a}e^{ax} \sin x$ | ④ $\frac{1}{a^2}e^{ax} \sin x$ |
| ⑤ $e^{ax} \cos x$ | ⑥ $ae^{ax} \cos x$ | ⑦ $\frac{1}{a}e^{ax} \cos x$ | ⑧ $\frac{1}{a^2}e^{ax} \cos x$ |
| ⑨ $-e^{ax} \sin x$ | ⑩ $-ae^{ax} \sin x$ | ⑪ $-\frac{1}{a}e^{ax} \sin x$ | ⑫ $-\frac{1}{a^2}e^{ax} \sin x$ |
| ⑬ $-e^{ax} \cos x$ | ⑭ $-ae^{ax} \cos x$ | ⑮ $-\frac{1}{a}e^{ax} \cos x$ | ⑯ $-\frac{1}{a^2}e^{ax} \cos x$ |

13 の解答群

- | | |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| ① $\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a \cos x + \sin x)$ | ② $\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a \cos x - \sin x)$ |
| ③ $\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a \sin x + \cos x)$ | ④ $\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a \sin x - \cos x)$ |
| ⑤ $\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a \sin x + \sin x)$ | ⑥ $\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a \cos x - \cos x)$ |
| ⑦ $\frac{ae^{ax}}{a^2+1}(a \cos x + \sin x)$ | ⑧ $\frac{ae^{ax}}{a^2+1}(a \cos x - \sin x)$ |
| ⑨ $\frac{ae^{ax}}{a^2+1}(a \sin x + \cos x)$ | ⑩ $\frac{ae^{ax}}{a^2+1}(a \sin x - \cos x)$ |

問 5 $-\infty < x < \infty$ で微分可能な関数 $f(x)$ に対して $u(x, y)$ を

$$u(x, y) = \int_{x-2y}^{x+2y} f(t) dt$$

と定義する. これに対して $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ を考えると

$$u(x, y) = \boxed{14}$$

が成り立つ. これより $u(x, y)$ は式 $\boxed{15}$ をみたすことがわかる.

$\boxed{14}$ の解答群

- ① $F(x + 2y) + F(x - 2y)$ ② $F(x + 2y) - F(x - 2y)$
- ③ $F(x + 2y) + F(x - 2y) - F(x) - F(2y)$
- ④ $F(x + 2y) - F(x - 2y) - F(x) + F(2y)$

$\boxed{15}$ の解答群

- ① $\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ② $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
- ③ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ④ $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- ⑤ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ⑥ $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

問6 xy 平面上の集合 D が

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq 1\}$$

で与えられているとき、重積分

$$I = \iint_D x^2 \sqrt{1+3y^2} dx dy$$

の値を求める。集合 D は

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \boxed{16} \leq x \leq \boxed{17}\}$$

と表されるので、

$$I = \int_0^1 \left\{ \sqrt{1+3y^2} \left(\int_{\boxed{16}}^{\boxed{17}} x^2 dx \right) \right\} dy = \int_0^1 \boxed{18} dy = \boxed{19}$$

となる。

16 ・ **17** の解答群

- ① 0 ② 1 ③ $y^{\frac{1}{3}}$ ④ y ⑤ y^3

18 の解答群

- ① $\frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+3y^2}$ ② $\frac{1}{2}y^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+3y^2}$ ③ $y^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+3y^2}$
 ④ $\frac{1}{3}y^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+3y^2}$ ⑤ $\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+3y^2}$ ⑥ $y^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+3y^2}$
 ⑦ $\frac{1}{3}y\sqrt{1+3y^2}$ ⑧ $\frac{1}{2}y\sqrt{1+3y^2}$ ⑨ $y\sqrt{1+3y^2}$

19 の解答群

- ① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{4}{27}$ ④ $\frac{5}{27}$ ⑤ $\frac{7}{27}$ ⑥ $\frac{8}{27}$
 ⑦ $\frac{1}{9}$ ⑧ $\frac{2}{9}$ ⑨ $\frac{1}{3}$ ⑩ $\frac{2}{3}$ ⑪ 1

計算用紙

第2分野 線形代数

[問 1 ~ 問 5 : 解答番号 20 ~ 36]

問 1 3次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^3 の3つのベクトル

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を各列とする3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ の値は

20 である. これを用いると, 4次正方行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|B|$ の値は 21 であることがわかる.

20 ・ 21 の解答群

① 0

② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5 ⑦ 6 ⑧ 7 ⑨ 8

⑩ -1 ⑪ -2 ⑫ -3 ⑬ -4 ⑭ -5 ⑮ -6 ⑯ -7 ⑰ -8

(2) v_1, v_2, v_3 に対して,

$$Gv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Gv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Gv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をみたす行列 G の $(2, 3)$ 成分 ($(2, 3)$ 要素ともいう) は, **22** である.

22 の解答群

⑩ 0

① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$ ⑥ $\frac{1}{3}$ ⑦ $\frac{2}{3}$ ⑧ $\frac{4}{3}$

⑨ -1 ① -2 ② -3 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$ ⑥ $-\frac{2}{3}$ ⑦ $-\frac{4}{3}$

問 2 空間内の 3 点 $A(1, 2, 4)$, $B(1, -1, 1)$, $C(a, 1, -2)$ と原点 O が同一平面上に存在するように定数 a を定める. これら 4 つの点が同一平面上に存在するための必要十分条件は, 3 つのベクトル

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が **23** ことである. これから, $a =$ **24** が求まる.

23 の解答群

- ① 1 次独立 (線形独立) である ② 1 次従属 (線形従属) である
 ③ 直交する ④ 直交しない

24 の解答群

- ① 0
 ② 1 ③ 2 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$ ⑥ $\frac{1}{3}$ ⑦ $\frac{2}{3}$ ⑧ $\frac{4}{3}$
 ⑨ -1 ⑩ -2 ⑪ $-\frac{1}{2}$ ⑫ $-\frac{3}{2}$ ⑬ $-\frac{1}{3}$ ⑭ $-\frac{2}{3}$ ⑮ $-\frac{4}{3}$

計算用紙

問3 連立1次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 5y + az = b \end{cases}$$

について考える。ただし a, b は定数とする。

- (1) 方程式 (*) に対応して同じ係数をもつ連立1次方程式

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 5y + az = 0 \end{cases}$$

を考えたとき、この方程式の解が $x = y = z = 0$ のただ1つであるのは $a \neq$ のときである。

- (2) $a =$ のとき、方程式の係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & a \end{pmatrix}$ の階数 (ランク) は である。

- (3) $a =$ のとき、最初の方程式 (*) が解をもつのは $b =$ のときである。このとき、(*) は無数の解をもち、 $y = 2t$ (t は任意の実数) とおけば

$$x = \text{}, \quad z = \text{$$

と表せる。

~ の解答群

- ① 0
 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5 ⑦ 6 ⑧ 8 ⑨ 9 ⑩ 10
 ⑪ -1 ⑫ -2 ⑬ -3 ⑭ -4 ⑮ -6 ⑯ -8 ⑰ -9 ⑱ -10

28 ・ 29 の解答群

① $-2t + 3$

② $2t - 3$

③ $2t - \frac{1}{3}$

④ $2t + \frac{1}{3}$

⑤ $3t - \frac{5}{2}$

⑥ $3t + \frac{5}{2}$

⑦ $-4t - 4$

⑧ $-4t + 4$

⑨ $5t - 2$

⑩ $5t + 2$

Ⓐ $5t - \frac{2}{3}$

Ⓑ $5t + \frac{2}{3}$

Ⓒ $5t - \frac{3}{2}$

Ⓓ $5t + \frac{5}{2}$

問4 連立1次方程式

$$(*) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{a} \quad \text{ただし, } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

を解く. ここで行列 A が

$$\text{下三角行列 } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{と上三角行列 } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

によって $A = BC$ と表されることを利用する.

方程式(*)は, $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$ とおくと, $B\mathbf{y} = \mathbf{a}$ となる. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおいて書き直すと

$$\begin{cases} y_1 & = & 1 \\ -y_1 + y_2 & = & 0 \\ -y_1 - 3y_2 + y_3 & = & -2 \end{cases}$$

であるから, 上から順に解いて, $y_1 = 1, y_2 = \boxed{30}, y_3 = \boxed{31}$ を得る. したがって方程式(*)は

$$C\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{30} \\ \boxed{31} \end{pmatrix}$$

に帰着される. \mathbf{x} について同様に解くと, $\mathbf{x} = \boxed{32}$ が求まる.

$\boxed{30} \cdot \boxed{31}$ の解答群

- ① 0
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6 ⑥ 8 ⑦ 9 ⑧ 10
- ⑨ -1 ⑩ -2 ⑪ -3 ⑫ -4 ⑬ -6 ⑭ -8 ⑮ -9 ⑯ -10

32 の解答群

$$\textcircled{0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{7} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

問5 3次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^3 の2つのベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \quad (a \text{ は定数})$$

は, $a = \boxed{33}$ のとき直交する.

このとき, 3次の正方行列

$$A = \mathbf{u}^t \mathbf{u} + \mathbf{v}^t \mathbf{v}$$

を考える. ただし ${}^t \mathbf{u}, {}^t \mathbf{v}$ はそれぞれ \mathbf{u}, \mathbf{v} の転置を表す. 例えば, ${}^t \mathbf{u} = (-1, 2, 1)$ である.

$$(\mathbf{u}^t \mathbf{u}) \mathbf{u} = \boxed{34} \mathbf{u}, \quad (\mathbf{v}^t \mathbf{v}) \mathbf{u} = \boxed{35} \mathbf{u}$$

が成り立つから, \mathbf{u} は A の固有値 $\boxed{36}$ に対応する固有ベクトルである.

$\boxed{33} \sim \boxed{36}$ の解答群

① 0

② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5 ⑦ 6 ⑧ 7 ⑨ 8

⑩ -1 ⑪ a ⑫ -2 ⑬ b ⑭ -3 ⑮ c ⑯ -4 ⑰ d ⑱ -5 ⑲ e ⑳ -6 ㉑ f ㉒ -7 ㉓ g ㉔ -8

計算用紙

第3分野 常微分方程式

[問 1 ～ 問 5 : 解答番号 37 ～ 54]

(注意) 各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を表す. また, 特殊解は特解ともいう.

問 1 微分方程式

$$(*) \quad y' + y = 10 \sin 2x$$

を解く.

(1) 対応する同次方程式

$$y' + y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{37}$$

である.

37 の解答群

① Ce^x

① $e^x + C$

② $-e^x + C$

③ Ce^{-x}

④ $e^{-x} + C$

⑤ $-e^{-x} + C$

⑥ $C \sin x$

⑦ $\sin x + C$

⑧ $-\sin x + C$

⑨ $C \cos x$

⑨ $\cos x + C$

⑩ $-\cos x + C$

(C は任意定数)

(2) 微分方程式 (*) の特殊解を

$$y_p(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$$

とおくと,

$$a = \boxed{38}, \quad b = \boxed{39}$$

である.

38 ・ **39** の解答群

- ① 0
 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5
 ⑦ -1 ⑧ -2 ⑨ -3 ⑩ -4 ⑪ -5

(3) (1), (2) より, 微分方程式 (*) の一般解は

$$y(x) = \boxed{40}$$

である.

40 の解答群

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| ① $C \sin x + 2 \cos 2x - 4 \sin 2x$ | ① $C \cos x + 2 \cos 2x - 4 \sin 2x$ |
| ② $C \sin x - 4 \cos 2x + 2 \sin 2x$ | ③ $C \cos x - 4 \cos 2x + 2 \sin 2x$ |
| ④ $Ce^x + 2 \cos 2x - 4 \sin 2x$ | ⑤ $Ce^{-x} + 2 \cos 2x - 4 \sin 2x$ |
| ⑥ $Ce^x - 4 \cos 2x + 2 \sin 2x$ | ⑦ $Ce^{-x} - 4 \cos 2x + 2 \sin 2x$ |
| ⑧ $\sin x + 2 \cos 2x - 4 \sin 2x$ | ⑨ $\cos x + 2 \cos 2x - 4 \sin 2x$ |
| ⑩ $\sin x - 4 \cos 2x + 2 \sin 2x$ | ⑪ $\cos x - 4 \cos 2x + 2 \sin 2x$ |
| ⑫ $e^x + 2 \cos 2x - 4 \sin 2x$ | ⑬ $e^{-x} + 2 \cos 2x - 4 \sin 2x$ |
| ⑭ $e^x - 4 \cos 2x + 2 \sin 2x$ | ⑮ $e^{-x} - 4 \cos 2x + 2 \sin 2x$ |

(C は任意定数)

問 2 微分方程式

$$(*) \quad y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$$

を考える。このとき、

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

とおくと $y' = \boxed{41}$ となるから、 $u(x)$ に関する微分方程式

$$(**) \quad u' = \boxed{42}$$

が得られる。この方程式(**)の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{43}$$

である。したがって、(*)の一般解は $y(x) = x \boxed{43}$ となる。さらに、方程式(*)の解で初期条件 $y(1) = 1$ をみたすものは

$$y(x) = \boxed{44}$$

である。

41 の解答群

- | | | | |
|-------------|-------------|--------------|--------------|
| ① u' | ② $-u'$ | ③ $u + u'$ | ④ $u - u'$ |
| ⑤ xu' | ⑥ $-xu'$ | ⑦ $u + xu'$ | ⑧ $u - xu'$ |
| ⑨ $-u - u'$ | ⑩ $-u + u'$ | ⑪ $-u - xu'$ | ⑫ $-u + xu'$ |

42 の解答群

- | | | | | |
|-----------------|------------------|-------------------|--------------------|------------------------|
| ① u | ② $-u$ | ③ u^2 | ④ $-u^2$ | ⑤ $u - u^2$ |
| ⑥ xu | ⑦ $-xu$ | ⑧ xu^2 | ⑨ $-xu^2$ | ⑩ $x(u - u^2)$ |
| ⑪ $\frac{u}{x}$ | ⑫ $-\frac{u}{x}$ | ⑬ $\frac{u^2}{x}$ | ⑭ $-\frac{u^2}{x}$ | ⑮ $-\frac{u - u^2}{x}$ |

43 の解答群

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|---------------------------|
| ① $\frac{1}{\log x +C}$ | ④ $\frac{C}{\log x -1}$ | ⑦ $\frac{1}{\log x -1}+C$ |
| ② $\frac{1}{x+C}$ | ⑤ $\frac{C}{x}$ | ⑧ $\frac{1}{x}+C$ |
| ③ $\frac{1}{x^2+C}$ | ⑥ $\frac{C}{x^2}$ | ⑨ $\frac{1}{x^2}+C$ |
| ⑩ Ce^x | Ⓐ e^x+C | Ⓑ Ce^{-x} |
| Ⓒ $e^{-x}+C$ | | |

(C は任意定数)

44 の解答群

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|---------------------------|
| ① $\frac{-x}{\log x -1}$ | ④ $\frac{x}{\log x +1}$ | ⑦ $\frac{x}{\log x -1}+2$ |
| ② $\frac{2x}{x+1}$ | ⑤ $\frac{2x}{x^2+1}$ | ⑧ $\frac{1}{x}$ |
| ③ xe^{x-1} | ⑥ xe^{-x+1} | ⑨ $xe^x+(1-e)x$ |
| ⑩ $xe^{-x}+(1-e^{-1})x$ | | |

問3 非線形微分方程式

$$(*) \quad y' = y - 2y^2$$

を考える. $z(x) = \frac{1}{y(x)}$ とおくと, 方程式 (*) は z に関する線形微分方程式

$$(**) \quad z' = \boxed{45}$$

に書き直せる. 方程式 (**) の解で初期条件 $z(0) = z_0$ ($z_0 > 0$) をみたすものは

$$z(x) = \boxed{46}$$

と表せる. したがって $y = \frac{1}{z}$ より, $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \boxed{47}$ となる.

45 の解答群

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|------------|
| ① $-z - 2$ | ④ $-z - 1$ | ⑦ $-z$ | ⑩ $-z + 1$ |
| ② $-z + 2$ | ⑤ $-2z - 2$ | ⑧ $-2z - 1$ | ⑪ $-2z$ |
| ③ $-2z + 1$ | ⑥ $-2z + 2$ | | |

46 の解答群

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| ① $-2 + (z_0 + 2)e^{-x}$ | ④ $2 + (z_0 - 2)e^{-x}$ |
| ② $-2 + (z_0 + 2)e^{-2x}$ | ⑤ $2 + (z_0 - 2)e^{-2x}$ |
| ③ $-1 + (z_0 + 1)e^{-x}$ | ⑥ $1 + (z_0 - 1)e^{-x}$ |
| ⑦ $-1 + (z_0 + 1)e^{-2x}$ | ⑧ $1 + (z_0 - 1)e^{-2x}$ |
| ⑧ $z_0 e^{-x}$ | ⑨ $z_0 e^{-2x}$ |

47 の解答群

- | | | | |
|------------------|------|------------------|------|
| ① 0 | | | |
| ② $\frac{1}{2}$ | ⑤ 1 | ⑧ $\frac{3}{2}$ | ⑪ 2 |
| ③ $-\frac{1}{2}$ | ⑥ -1 | ⑨ $-\frac{3}{2}$ | ⑫ -2 |

計算用紙

問 4 微分方程式

$$y'' + 2ky' + 9y = 0 \quad (k \text{ は定数})$$

について考える.

(1) 一般解は,

$$k = 1 \text{ のとき} \quad y = \boxed{48}$$

$$k = 3 \text{ のとき} \quad y = \boxed{49}$$

$$k = 5 \text{ のとき} \quad y = \boxed{50}$$

である.

(2) y' が常に負となる特殊解 $y(x)$ が存在するための必要十分条件は, $\boxed{51}$ である.

$\boxed{48} \sim \boxed{50}$ の解答群

- ① $Ae^{-x} + Be^{-9x}$ ② $Ae^x + Be^{9x}$ ③ $Ae^{-3x} + Be^{3x}$
 ④ $(A + Bx)e^{-3x}$ ⑤ $(A + Bx)e^{3x}$
 ⑥ $(A + Bx)e^{-9x}$ ⑦ $(A + Bx)e^{9x}$
 ⑧ $e^{-x}(A \cos 8x + B \sin 8x)$ ⑨ $e^{-x}(A \cos 2\sqrt{2}x + B \sin 2\sqrt{2}x)$
 ⑩ $e^x(A \cos 8x + B \sin 8x)$ ⑪ $e^x(A \cos 2\sqrt{2}x + B \sin 2\sqrt{2}x)$
 (A, B は任意定数)

$\boxed{51}$ の解答群

- ① $k < 0$ ② $k \geq 0$ ③ $k = 0$
 ④ $|k| < 1$ ⑤ $|k| = 1$ ⑥ $|k| \geq 1$
 ⑦ $|k| < 3$ ⑧ $|k| = 3$ ⑨ $|k| \geq 3$
 ⑩ $|k| < 5$ ⑪ $|k| = 5$ ⑫ $|k| \geq 5$

計算用紙

問5 微分方程式

$$(*) \quad y'' + 4y = e^{2x}$$

の解で初期条件

$$(**) \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

をみたす $y(x)$ を求める.

(1) 対応する同次方程式 $y'' + 4y = 0$ の一般解は $y(x) = \boxed{52}$ である.

52 の解答群

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ① $A \cos 2x + B \sin 2x$ | ① $A \cos 4x + B \sin 4x$ |
| ② $Ae^{2x} + Be^{-2x}$ | ③ $Ae^{4x} + Be^{-4x}$ |
| ④ $Ae^{2x} + Bxe^{2x}$ | ⑤ $Ae^{4x} + Bxe^{4x}$ |
| ⑥ $Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$ | ⑦ $Ae^{-4x} + Bxe^{-4x}$ |

(A, B は任意定数)

(2) 関数 $y_p(x) = ae^{2x}$ (a は定数) が $(*)$ の特殊解になるのは, $a = \boxed{53}$ のときである.

53 の解答群

- ① 0 ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$ ⑥ $\frac{1}{4}$ ⑦ $\frac{1}{3}$ ⑧ $\frac{1}{2}$

(3) 以上より, 初期条件 (**) をみたす方程式 (*) の解は $y(x) = \boxed{54}$ である.

54 の解答群

④ $\frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{12} \sin 2x + \frac{1}{6} e^{2x}$

① $\frac{3}{8} \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} e^{2x}$

② $\frac{3}{10} \cos 2x + \frac{1}{20} \sin 2x + \frac{1}{5} e^{2x}$

③ $\frac{3}{8} e^{2x} + \frac{1}{8} e^{-2x}$

④ $\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x}$

⑤ $\frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{5}{6} x e^{-2x} + \frac{1}{6} e^{2x}$

⑥ $\frac{3}{10} e^{-2x} + \frac{7}{10} x e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{2x}$

⑦ $\frac{3}{8} e^{-4x} + \frac{7}{4} x e^{-4x} + \frac{1}{8} e^{2x}$

⑧ $\frac{1}{3} e^{-4x} + \frac{3}{2} x e^{-4x} + \frac{1}{6} e^{2x}$

⑨ $\frac{3}{10} e^{-4x} + \frac{13}{10} x e^{-4x} + \frac{1}{5} e^{2x}$

第4分野 確率・統計

〔 問 1 ～ 問 5 : 解答番号 55 ～ 72 〕

(注意) 事象 A に対し, $P(A)$ は A の起こる確率を表す. また, 確率変数 X に対し, $E(X)$, $V(X)$, $D(X)$ はそれぞれ X の期待値 (平均, 平均値), 分散, 標準偏差を表す. \emptyset は空事象を表す.

問 1 (1) 独立な確率変数 X, Y の確率分布がそれぞれ次で与えられている.

X の値	2	3	4
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Y の値	0	1	2
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

このとき, 確率変数 X の期待値は $E(X) = \boxed{55}$ であり, 分散は $V(X) = \boxed{56}$ である. また, $E(X - Y) = \boxed{57}$, $V(X - Y) = \boxed{58}$ である.

55 ～ 58 の解答群

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | |
| ⑤ $\frac{2}{3}$ | ⑥ $\frac{4}{3}$ | ⑦ $\frac{10}{3}$ | ⑧ $\frac{13}{3}$ | ⑨ $\frac{4}{9}$ |
| ⑩ $\frac{5}{9}$ | a $\frac{7}{9}$ | b $\frac{8}{9}$ | c $\frac{10}{9}$ | d $\frac{11}{9}$ |

(2) 確率変数 X がパラメータ 1 のポアソン分布に従うものとする。すなわち,

$$P(X = k) = e^{-1} \frac{1}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

このとき,

$$P(X \leq 1) = \boxed{59}$$

である。

59 の解答群

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------|-------------|-------------|
| ① 0 | ② $\frac{1}{4}$ | ③ $\frac{1}{2}$ | ④ 1 | |
| ⑤ $\frac{e^{-1}}{4}$ | ⑥ $\frac{e^{-1}}{2}$ | ⑦ e^{-1} | ⑧ $2e^{-1}$ | ⑨ $4e^{-1}$ |
| ⑩ $\frac{e^{-2}}{4}$ | Ⓐ $\frac{e^{-2}}{2}$ | Ⓑ e^{-2} | Ⓒ $2e^{-2}$ | Ⓓ $4e^{-2}$ |

問 2 2つの事象 A, B に対して,

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

とする.

- (1) $A \cap B = \emptyset$ のとき, A と B は **60** .
- (2) 事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す.
 $P(A|B) = \frac{1}{2}$ のとき, A と B は **61** .

60 ・ **61** の解答群

- ① 独立である ① 従属である (独立ではない)
- ② 独立であるとも従属であるともいえない

問 3 数直線上にコマをおき, 硬貨を投げて表が出たら正の方向に 1 だけコマを動かし, 裏が出たら動かさないものとする. 最初にコマを原点におき, 硬貨を 3 回投げた後のコマの座標を X とするとき, X が 0 となる確率は $P(X = 0) =$ **62** であり, X が 2 となる確率は $P(X = 2) =$ **63** である. また, X の期待値は $E(X) =$ **64** , X の標準偏差は $D(X) =$ **65** である. ただし硬貨を投げたときに表, 裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ とする.

62 ~ **65** の解答群

- ① 0 ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$
- ⑥ $\frac{5}{4}$ ⑦ $\frac{1}{8}$ ⑧ $\frac{3}{8}$ ⑨ $\frac{5}{8}$ a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- c $\frac{\sqrt{3}}{8}$ d $\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$ f $4\sqrt{3}$

計算用紙

問 4 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & (x \geq 0) \end{cases}$$

で与えられているものとする。また、 X の分布関数を

$$F(x) = P(X \leq x)$$

とする。このとき、 X の期待値は $E(X) = \boxed{66}$ で、

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{67} & (x < 0) \\ \boxed{68} & (x \geq 0) \end{cases}$$

である。

66 の解答群

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----|-----|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 |
| ⑥ $\frac{1}{2}$ | ⑦ $\frac{1}{3}$ | ⑧ $\frac{1}{4}$ | | |

67 ・ **68** の解答群

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-----------------------|
| ① 0 | ② e^{-2x} | ③ $e^{-\frac{1}{2}x}$ |
| ④ $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ | ⑤ $2e^{-2x}$ | ⑥ $1 - e^{-2x}$ |
| ⑦ $1 - e^{-\frac{1}{2}x}$ | ⑧ $1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ | ⑨ $1 - 2e^{-2x}$ |

計算用紙

問 5 A 工場では、機械を用いて長さ 10 mm の部品を作っている。この機械で作られる部品の長さは平均 10 mm, 分散 1 mm^2 の正規分布に従っていた。この機械が故障し修理を行った後、故障前と同様に部品の長さの平均が 10 mm であるかどうかを調べることにした。

修理後の機械で作られる部品の長さは、平均 $\mu \text{ mm}$, 分散 1 mm^2 の正規分布に従うものとする。この条件の下、有意水準 5% として

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = 10,$$

$$\text{対立仮説 } H_1 : \mu \neq 10$$

の両側検定を行う。

この機械で作られた部品の中から 16 個を取り出し、それらの長さを X_1, \dots, X_{16} とすると、標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$$

は平均 **69**, 分散 **70** の正規分布に従う。したがって帰無仮説 H_0 のもとで

$$Z = \frac{\bar{X} - 10}{\sqrt{\text{70}}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。実際に 16 個の部品の長さを測定したところ、 \bar{X} の実現値 \bar{x} は 10.5 mm であった。このとき、 Z の実現値 z は **71** であり、正規分布表から

$$P(|Z| \geq \text{71}) \doteq 0.0456 < 0.05$$

である。したがって帰無仮説は **72** といえる。

69 の解答群

- | | | | | |
|-----------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| ① 0 | ② μ | ③ 2μ | ④ 4μ | ⑤ 10μ |
| ⑥ 16μ | ⑦ $\frac{\mu}{2}$ | ⑧ $\frac{\mu}{4}$ | ⑨ $\frac{\mu}{10}$ | ⑩ $\frac{\mu}{16}$ |

70 の解答群

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 4 | ④ 10 | ⑤ 16 |
| ⑥ $\frac{1}{2}$ | ⑦ $\frac{1}{4}$ | ⑧ $\frac{1}{10}$ | ⑨ $\frac{1}{16}$ | ⑩ $\frac{5}{8}$ |

71 の解答群

- ① 0.0 ② 0.5 ③ 1.0 ④ 2.0 ⑤ 10.0 ⑥ 10.5

72 の解答群

- ① 棄却されず，故障前と長さが同じではない
② 棄却されず，故障前と長さが同じである
③ 棄却され，故障前と長さが同じではない
④ 棄却され，故障前と長さが同じである