2004 年 12 月 21 日

工学系学部数学統一試験問題作成委員会

2004年
中国・四国地区大学工学系学部数学統一試験
解答，解説

目 次

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 1 問 (60 点)	**1**	8	⑦	2
	2	10	⑥	存在しない
	3	10	②	奇関数, 単調増加, 原点で傾き 2
	4	10	④	$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
	5	10	②	0
	6	12	ⓐ	$\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 2 問 (40 点)	**7**	6	②	2
	8	6	③	3
	9	6	③	3
	10 , **11** , **12**	10	⓪ , ① , ②	a, b, c
	13	6	ⓒ	abc
	14	6	⑥	6 個

- **10** 、 **11** 、 **12** は、3 箇所全てが正答通りにマークされたもののみに満点 (10 点) を与え、それ以外の場合には点を与えない。

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 3 問 (60 点)	**15**	5	①	1
	16	5	①	1
	17	10	②	2
	18	8	⑤	5
	19	8	②	2
	20	8	②	2
	21	6	⓪	0
	22	10	②	2

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 4 問 (40 点)	**23** **24**	$4+4$	①，③	$1 \pm \sqrt{3}$
	25	6	③	$-\sqrt{3}$
	26	6	②	$(-\lambda)^2$
	27 **28**	8	①，②	$-\frac{1}{2}\lambda^2\phi_M\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
	29 **30** **31**	$4+4+4$	①，③，②	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

- **23** **24** および **29** **30** **31** は箱が一つだけ正解でも得点を与える。内訳は配点欄に書いてあるとおり。
- **27** **28** は両方とも正解のときのみ得点を与える。

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第5問 (60点)	$\boxed{\mathbf{32}}$	10	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{33}}$	10	②	2
	$\boxed{\mathbf{34}}$	15	⑤	$\sqrt{3}e^{-2x}-\dfrac{3}{4}e^{2x}$
	$\boxed{\mathbf{35}}$	7	⑦	$-2z^2-z+1$
	$\boxed{\mathbf{36}}$	1	②	2
	$\boxed{\mathbf{37}}$	7	⑥	$\dfrac{1}{3}\log\dfrac{z+1}{2z-1}$
	$\boxed{\mathbf{38}}$	10	②	$\dfrac{x^3+1}{2x^3-1}$

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第6問 (40点)	$\boxed{\mathbf{39}}$	5	⑤	$2(p'-xp)$
	$\boxed{\mathbf{40}}$	5	⑥	$p''-2xp'+x^2p$
	$\boxed{\mathbf{41}}$	8	⑧	$e^{\frac{x^2}{2}}$
	$\boxed{\mathbf{42}}$	7	①	1
	$\boxed{\mathbf{43}}$	5	③	x^2-1
	$\boxed{\mathbf{44}}$	5	⑦	$c_1\cos x+c_2\sin x$
	$\boxed{\mathbf{45}}$	5	①	x^2-3

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 7 問 (60 点)	$\boxed{\mathbf{46}}$	4	⓪	×
	$\boxed{\mathbf{47}}$	4	⓪	×
	$\boxed{\mathbf{48}}$	4	①	○
	$\boxed{\mathbf{49}}$	4	①	○
	$\boxed{\mathbf{50}}$	6	②	2
	$\boxed{\mathbf{51}}$	5	ⓐ	e^{2x}
	$\boxed{\mathbf{52}}$	5	⑨	$\frac{3}{4}$
	$\boxed{\mathbf{53}}$	5	①	1
	$\boxed{\mathbf{54}}$	5	④	$-\frac{1}{2}$
	$\boxed{\mathbf{55}}$	5	⑤	$\frac{1}{4}$
	$\boxed{\mathbf{56}}$	5	⑦	$\frac{1}{6}$
	$\boxed{\mathbf{57}}$	4	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{58}}$	4	①	1

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 8 問 (40 点)	$\boxed{\mathbf{59}}$	5	①	p
	$\boxed{\mathbf{60}}$	5	①	p
	$\boxed{\mathbf{61}}$	6	③	$p(1-p)$
	$\boxed{\mathbf{62}}$	6	④	np
	$\boxed{\mathbf{63}}$	6	⑦	$np(1-p)$
	$\boxed{\mathbf{64}}$	6	ⓖ	2 項
	$\boxed{\mathbf{65}}$	6	⑨	$\frac{5}{16}$

第１問，第２問
微分積分

第 1 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{6}}$ 〕　(配点 60 点)

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ. ただし log は自然対数とする.

問 1　次の値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \boxed{\mathbf{1}}.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ **の解答群**

⓪ $-\infty$　① ∞　② -3　③ -2　④ -1
⑤ 0　⑥ 1　⑦ 2　⑧ 3

解答　分母 $\sin x$ と分子 $e^x - e^{-x}$ はともに $x \to 0$ の時 0 に収束するので, いわゆる $\frac{0}{0}$ の不定形である. 分母と分子はともに微分可能ゆえロピタルの定理が適用できるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{\frac{d}{dx}\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

従って答えは ⑦ である.

問 2　$(x, y) \to (0, 0)$ のとき, 関数 $g(x, y) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ の極限は $\boxed{\mathbf{2}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ 0 である　① 1 である　② 2 である　③ 3 である
④ $\dfrac{1}{2}$ である　⑤ $\dfrac{1}{3}$ である　⑥ 存在しない

解答　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ と置く. この時 $(x, y) \to 0$ とは $r \to +0$ を意味する. また

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta - r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{r} = -\frac{\sqrt{2}\sin(\theta - \pi/4)}{r}$$

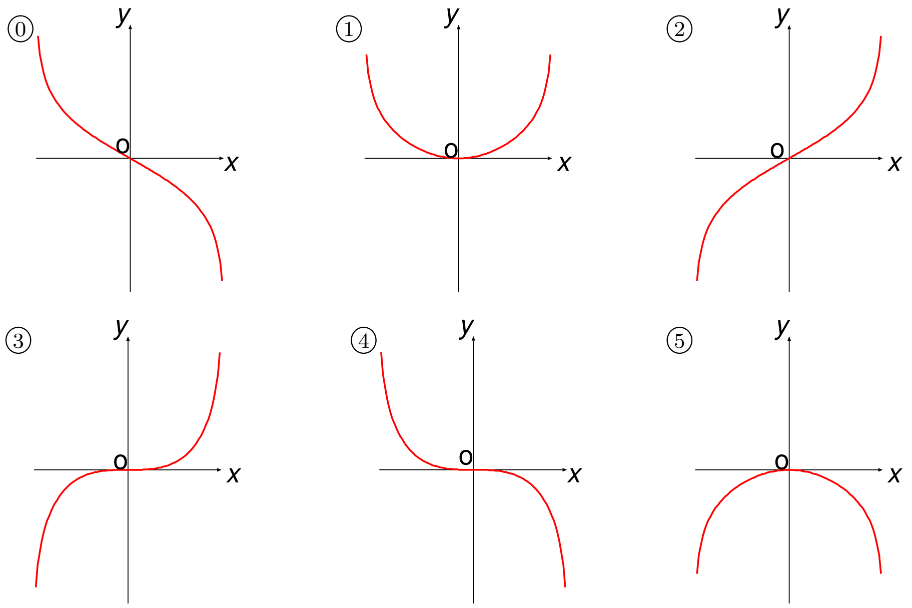
であるから, 近づく角度 θ を固定して $r \to +0$ とする時

$$\lim_{r\to +0} g(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{cases} -\infty, & \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4} \\ 0, & \theta = \frac{\pi}{4} \text{ or } \frac{5\pi}{4} \\ \infty, & \frac{5\pi}{4} < \theta < 2\pi \text{ or } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

となり，極限値は θ により異なる．もし 2 変数関数としての極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ が存在するならば，近づく方向 θ に無関係な共通な値に収束する筈であるから，これは 2 変数関数としての極限が存在しないことを示している．以上より答は ⑥ である．

問 3　関数 $y = \log \frac{1+x}{1-x}$　$(-1 < x < 1)$ のグラフの概形は $\boxed{\ 3\ }$ であり，マクローリン展開 $(x = 0$ におけるテイラー展開$)$ は $\boxed{\ 4\ }$ である．ただし x 軸，y 軸の縮尺は適当に変更してある．

$\boxed{\ 3\ }$ の解答群



$\boxed{\ 4\ }$ の解答群

⓪ $2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$　① $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$　② $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$　③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$

④ $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$　⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$　⑥ $2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$　⑦ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$

解答　$y = f(x) = \log(1+x)/(1-x)$ とおくと

$$f(-x) = \log(1-x)/(1+x) = -\log(1+x)/(1-x) = -f(x)$$

が成り立つので奇関数である．従ってそのグラフは原点に関して対称であるが, 解答群の ①, ⑤ はそうなっていない．次に

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} > 0 \quad (-1 < x < 1)$$

ゆえ $f(x)$ は単調増加であるが, 解答群の ⓪, ①, ④, ⑤ はそうなっていない．

以上より, 正解は ② または ③ のどちらかである．ここで $f'(0) = 2$ ゆえグラフの $x = 0$ での接線の傾きは正である．従って答は ② である．

次に初項 a 公比 $r(-1 < r < 1)$ の無限等比級数の和の公式

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

において, $a = 1$, $r = x^2$ と置けば

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = 2\{1 + x^2 + x^4 + \cdots\} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

が成り立つ．これを項別に積分して $f(0) = 0$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) \\ &= \int_0^x f'(t)\,dt = 2\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\,dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\,dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

が成り立つ．従って答えは ④ である．

問 4　次の積分値を求めよ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin 5x \cos^4 2x\,dx = \boxed{\mathbf{5}}.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ **の解答群**

⓪ -2 ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2π ⑥ $-\pi$ ⑦ π ⑧ 2π ⑨ $-\dfrac{\pi}{2}$ ⓐ $\dfrac{\pi}{2}$

解答　被積分関数 $|x| \sin 5x \cos^4 2x$ が奇関数, つまり $f(-x) = -f(x)$ を満たすことに注意しよう．そして積分区間が原点に関して対称であることより, その値は

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \int_{\pi}^{0} f(-y)\,(-dy) + \int_0^{\pi} f(x)\,dx \\ &= -\int_0^{\pi} f(y)\,dy + \int_0^{\pi} f(x)\,dx \\ &= 0. \end{aligned}$$