EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2022年12月10日（土）
4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊ 受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．
(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(8) 問題冊子は持ち帰ること．
(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は, 前に現れた番号であることを表す．したがって, 例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\mathbf{23}}$ は（$\boxed{\mathbf{23}}$）という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

目次

第 1 分野	微分積分 ……	3
第 2 分野	線形代数 ……	16
第 3 分野	常微分方程式 ……	33
第 4 分野	確率・統計 ……	44

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{18}}$ 〕

問１　次の 2 つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{x+3\sin x}=\boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)=\boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{4}$　⑥ $\frac{3}{4}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ $-\frac{1}{2}$　ⓐ $-\frac{3}{2}$　ⓑ $-\frac{1}{4}$　ⓒ $-\frac{3}{4}$

ⓓ ∞　ⓔ $-\infty$

解説

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ であることを用いると

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{x+3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin 3x}{x}}{1+3\dfrac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3\dfrac{\sin 3x}{3x}}{1+3\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ⑨ である．

関数 $x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)$ の分子と分母に $\sqrt{x^2+4}-x$ をかけると

$$\begin{aligned} x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)&=\frac{x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+4}-x}\\ &=\frac{x\left\{(x^2+4)-x^2\right\}}{\sqrt{x^2+4}-x}=\frac{4x}{\sqrt{x^2+4}-x}\end{aligned}$$

となる．$x=-\dfrac{1}{t}$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to+0$ より，与式は

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)&=\lim_{t\to+0}\frac{-\frac{4}{t}}{\sqrt{(-\frac{1}{t})^2+4}+\frac{1}{t}}\\ &=\lim_{t\to+0}\frac{-4}{\sqrt{1+4t^2}+1}=-2\end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ⑧ である．

問 2 関数 $y = \sin^{-1} x \ \ (-1 < x < 1)$ について考える．まず $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算すると

$$y' = \boxed{\ \mathbf{3}\ }, \qquad y'' = \boxed{\ \mathbf{4}\ }$$

より，y は関係式

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0$$

を満たす．この式の両辺を x について微分すると

$$\left\{(1-x^2)y'' - xy'\right\}' = (1-x^2)y''' + \boxed{\ \mathbf{5}\ }\,xy'' - y' = 0$$

となり，$x = 0$ を代入すれば，$y'''(0) = \boxed{\ \mathbf{6}\ }$ である．

$\boxed{3}$ ・ $\boxed{4}$ の解答群

⓪ $\sin^{-1} x$　① $-\sin^{-1} x$　② $\cos^{-1} x$　③ $-\cos^{-1} x$

④ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　⑤ $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　⑥ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　⑦ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑧ $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$　⑨ $-\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

ⓐ $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$　ⓑ $-\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

ⓒ $\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$　ⓓ $-\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

ⓔ $\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$　ⓕ $-\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{5}$ ・ $\boxed{6}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

解説

本問は逆三角関数 $y=\sin^{-1}x$ の $x=0$ での第3次微分係数 $y'''(0)$ を求める問題である．基本的な解法は第3次導関数 y''' を求め $x=0$ を代入することである．まず，第2次までの導関数を求める．逆三角関数の微分公式および合成関数の微分公式を用いれば

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad y''=\left\{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{3}}$ は ⑥，$\boxed{\mathbf{4}}$ は ⓔ となる．

あともう1回微分操作を y'' に行えば y''' が求められるが，y'' の式が複雑なため計算が大変である．そこで，本問はその点を解消するため，y' と y'' の間にある簡便な関係式を導きそこから効率的に $y'''(0)$ を求める．y', y'' の式から問題文にあるように y は関係式

$$(1-x^2)y''-xy'=0 \tag{$*$}$$

を満たす．この式の両辺を x について微分すると，積の微分公式より

$$0=\left\{(1-x^2)y''-xy'\right\}'=\left\{(1-x^2)y''\right\}'-\left\{xy'\right\}'$$

$$=\left\{-2xy''+(1-x^2)y'''\right\}-\left\{1\cdot y'+xy''\right\}=(1-x^2)y'''-3xy''-y'$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{5}}$ は ⑨ である．この等式に $x=0$ を代入すれば，$y'''(0)=y'(0)=1$ となるので，$\boxed{\mathbf{6}}$ は ① である．

本問の結果は一般化することができる．つまり，自然数 n に対して関数 $y=\sin^{-1}x$ の $x=0$ での第 n 次微分係数 $y^{(n)}(0)$ を求めることができる．具体的にはライプニッツの公式

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

を用いれば，

$$\left\{(1-x^2)y''\right\}^{(n)}=\binom{n}{0}(1-x^2)y^{(n+2)}+\binom{n}{1}\left(-2xy^{(n+1)}\right)+\binom{n}{2}\left(-2y^{(n)}\right)$$

$$=(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}$$

$$\left\{xy'\right\}^{(n)}=\binom{n}{0}xy^{(n+1)}+\binom{n}{1}y^{(n)}=xy^{(n+1)}+ny^{(n)}$$

となるので，関係式 $(*)$ の両辺を x について n 回微分すると

$$0=\left\{(1-x^2)y''-xy'\right\}^{(n)}=\left\{(1-x^2)y''\right\}^{(n)}-\left\{xy'\right\}^{(n)}$$

$$=(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}$$

を満たす．この式に $x = 0$ を代入すると n に関する漸化式 $y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0)$ が成り立つことがわかる．$y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$ であることに注意すると，この漸化式から

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} (n-2)^2(n-4)^2 \cdots 3^2 & (n \text{ が奇数}) \\ \\ 0 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

と $y^{(n)}(0)$ が求まる．同様な手法で他の逆三角関数の $x = 0$ での第 n 次微分係数を求められる．

問 3 (1) 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$ を求める．被積分関数は

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\boxed{\mathbf{7}}}{x-1} + \frac{\boxed{\mathbf{8}}\,x+1}{x^2+1}$$

と部分分数に展開されるので

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1| \\ \displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \boxed{\mathbf{9}} \qquad \text{（積分定数は省略）} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \boxed{\mathbf{10}} \end{cases}$$

を用いると

$$I = \boxed{\mathbf{7}}\log|x-1| + \boxed{\mathbf{8}} \cdot \boxed{\mathbf{9}} + \boxed{\mathbf{10}} + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

である．

7 ・ **8** の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$　⑥ $\frac{5}{2}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ $-\frac{1}{2}$　ⓑ $-\frac{3}{2}$　ⓒ $-\frac{5}{2}$

9 ・ **10** の解答群

⓪ $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　① $\sin^{-1} x$　② $\log(x^2+1)$

③ $-\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　④ $-\sin^{-1} x$　⑤ $-\log(x^2+1)$

⑥ $\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$　⑦ $\tan^{-1} x$　⑧ $\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$

⑨ $-\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$　ⓐ $-\tan^{-1} x$　ⓑ $-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$

解説

(1) まず，$\boxed{\mathbf{7}}$ を A，$\boxed{\mathbf{8}}$ を B とおき，x の恒等式として A, B を解く．

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+1}{x^2+1}$$

の両辺に $(x-1)(x^2+1)$ をかけると

$$3x+1 = A(x^2+1) + (Bx+1)(x-1)$$

となり，さらにこの等式の右辺を x について整理すると

$$3x+1 = (A+B)x^2 + (-B+1)x + (A-1)$$

となる．両辺の多項式の係数をそれぞれ比較して次を得る．

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ -B+1 &= 3 \\ A-1 &= 1 \end{cases}$$

これを解いて $A=2, B=-2$ を得る．したがって

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-2x+1}{x^2+1}$$

となるので，$\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ② であり，$\boxed{\mathbf{8}}$ の答えは ⑧ である．次に各項を不定積分すると

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1| \\ \displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) & \text{（積分定数は省略）} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x \end{cases}$$

より，$\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは ⑧ であり，$\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ⑦ である．したがって

$$I = 2\log|x-1| - \log(x^2+1) + \tan^{-1} x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

を得る．

(2) 曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (0 \leqq x \leqq \log 2)$ の長さ L は

$$L = \int_0^{\log 2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{\log 2} \boxed{\mathbf{11}}\, dx = \boxed{\mathbf{12}}$$

である.

$\boxed{11}$ の解答群

⓪ $e^x + e^{-x}$　① $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$　② $e^{2x} + e^{-2x}$　③ $\dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$

④ $e^x - e^{-x}$　⑤ $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　⑥ $e^{2x} - e^{-2x}$　⑦ $\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

$\boxed{12}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{3}{2}$　⑥ $\dfrac{5}{2}$

⑦ $\dfrac{1}{4}$　⑧ $\dfrac{3}{4}$　⑨ $\dfrac{5}{4}$　ⓐ $\dfrac{7}{4}$　ⓑ $\dfrac{9}{4}$　ⓒ $\dfrac{11}{4}$

解説

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}&=\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right\}^2}\\&=\sqrt{\frac{4+(e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4}}\\&=\sqrt{\frac{(e^x)^2+2+(e^{-x})^2}{4}}\\&=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\end{aligned}$$

となる．よって $\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ① である．また

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\log 2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\log 2}\left(e^x+e^{-x}\right)\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^{\log 2}\\&=\frac{1}{2}\left(e^{\log 2}-e^{-\log 2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

である．よって $\boxed{\mathbf{12}}$ の答えは ⑧ である．

問 4 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+y^3+3xy+2$ の極値について考える.

(1) 連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

の解は $(x,y)=(0,0)$ と $(x,y)=$ $\boxed{\mathbf{13}}$ の 2 つである.

$\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ $(1,0)$　① $(0,1)$　② $(-1,0)$　③ $(0,-1)$

④ $(1,1)$　⑤ $(1,-1)$　⑥ $(-1,1)$　⑦ $(-1,-1)$

(2) 関数 $H(x,y)$ を

$$H(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right\}^2$$

と定める．点 $(x,y)=$ $\boxed{\mathbf{13}}$ において $H(x,y)=$ $\boxed{\mathbf{14}}$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)<0$ であるから, $f(x,y)$ はこの点において $\boxed{\mathbf{15}}$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 3　③ 4　④ 6　⑤ 9　⑥ 27　⑦ 36　⑧ 45

⑨ -1　ⓐ -3　ⓑ -4　ⓒ -6　ⓓ -9　ⓔ -27　ⓕ -36　ⓖ -45

$\boxed{\mathbf{15}}$ の解答群

⓪ 極大値をとる　① 極小値をとる　② 極値をとらない

解説

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を同時にみたす点を $(x,y)=(a,b)$ を停留点という．この問題の停留点は

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2+3y &= 0 & \cdots & (\sharp) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3y^2+3x &= 0 & \cdots & (\flat) \end{cases}$$

から求められる．$(\sharp)$ は $y=-x^2$ と同等であるから，これを $(\flat)$ に代入して $x^4+x=0$ を得る。この 4 次方程式の右辺を因数分解すると $x(x+1)(x^2-x+1)=0$ より，解は $x=0,-1,\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である．x は実数なので，$x=0,-1$ を得る．

$x=0$ のとき：$x=0$ を $y=-x^2$ に代入すると $y=0$．この場合は $(x,y)=(0,0)$ である．

$x=-1$ のとき：$x=-1$ を $y=-x^2$ に代入すると $y=-1$．この場合は $(x,y)=(-1,-1)$ である．

以上より停留点は $(x,y)=(0,0),(-1,-1)$ となり， $\boxed{\mathbf{13}}$ の答えは ⑦ である．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=3$ より，$H(x,y)=36xy-9$ となる．したがって $(x,y)=(-1,-1)$ において

$$H(-1,-1)=36(-1)^2-9=27$$

となり， $\boxed{\mathbf{14}}$ の答えは ⑥ である．

また問題文中にもあるように $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)=-6<0$ なので，$H(-1,-1)>0$ と合わせて，$f(x,y)$ は点 $(x,y)=(-1,-1)$ において極大値をとる．つまり $\boxed{\mathbf{15}}$ の答えは ⓪ である．

なお, 行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$ を関数 $f(x,y)$ に関するヘッセ行列という．$H(x,y)$ はこのヘッセ行列の行列式である．

一般に，$f(x,y)$ の停留点 (a,b) において次のことが成り立つ：

(D1) $H(a,b)>0$ のとき,

(i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$ であれば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極小になり,

(ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$ であれば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極大になる．

(D2) $H(a,b)<0$ のとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) では極大にも極小にもならない．

問 5 xy 平面内の集合 D が

$$D = \left\{(x, y) \mid x + y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D e^{-(x+y)^2}\,dxdy$$

の値を求める．変数変換 $x = u - v$, $y = v$ を行うと, 集合 D は uv 平面内の集合

$$E = \left\{(u, v) \mid 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq \boxed{\mathbf{16}}\right\}$$

に対応する．この変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{17}}$$

である．これらを用いると $I = \boxed{\mathbf{18}}$ を得る．

$\boxed{\mathbf{16}}$・$\boxed{\mathbf{17}}$ の解答群

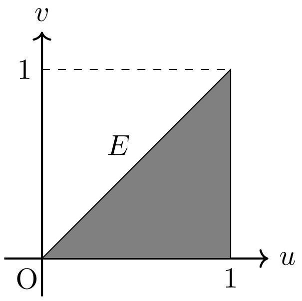
⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $\dfrac{1}{3}$	⑤ $\dfrac{1}{4}$
⑥ u	⑦ v	⑧ $u+v$	⑨ $u-v$	ⓐ $v-u$	ⓑ uv

$\boxed{\mathbf{18}}$ の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{1}{2}(e+1)$	② $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{e}\right)$	③ $\dfrac{1}{2}\left(e+\dfrac{1}{e}\right)$
	④ $\dfrac{1}{2}(e-1)$	⑤ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$	⑥ $\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$

解説

変数変換 $x = u - v,\ y = v$ により D を定義する各条件, $x + y \leqq 1$ は $u \leqq 1$ に, $x \geqq 0$ は $u - v \geqq 0$ に, $y \geqq 0$ は $v \geqq 0$ に対応する．従って E を図示すると



のようになる．これは $E = \{(u, v) \mid 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq u\}$ と表すことが出来る．従って $\boxed{\mathbf{16}}$ の答えは⑥ である．またこの変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）J は

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

であるから $\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ① である．さらに

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{-(x+y)^2}\, dxdy \\ &= \iint_E e^{-u^2} |J|\, dudv \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^u e^{-u^2}\, dv \right\} du \\ &= \int_0^1 u e^{-u^2}\, du \\ &= -\frac{1}{2} \left[e^{-u^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

であるから $\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ⑤ である．

第2分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{19}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{36}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\operatorname{rank} A$ は A の階数（ランク）を表す.

問 1　行列 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ について考える.

(1)　A の行列式は $|A| = \boxed{\mathbf{19}}$ である.

$\boxed{\mathbf{19}}$ **の解答群**

⓪ 0

① $1+x+x^2+x^3$　　② $1-x+x^2-x^3$

③ $1+2x+3x^2+4x^3$　　④ $1-2x+3x^2-4x^3$

⑤ $-1+2x-3x^2+4x^3$　　⑥ $4+3x+2x^2+x^3$

⑦ $4-3x+2x^2-x^3$　　⑧ $-4+3x-2x^2+x^3$

(2)　$x=0$ のとき A は逆行列 A^{-1} をもち，このとき A^{-1} の $(3,2)$ 成分は $\boxed{\mathbf{20}}$ である.

$\boxed{\mathbf{20}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{4}$　⑥ $\dfrac{3}{4}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ $-\dfrac{1}{2}$　ⓑ $-\dfrac{1}{4}$　ⓒ $-\dfrac{3}{4}$

解説

(1) 4 次の行列式であるからサラスの方法は使えない．そこで行や列に関する展開を行うことを考えよう．このとき, どの行, どの列で展開すると簡単であるか判断が大変悩ましい．この場合，意外かもしれないが第 4 行について展開するのが得策である．実際, 第 4 行で展開すると出現する 4 つの 3 次行列式は，全て上三角または下三角の行列式なので殆ど手間を要さず

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

を得る．従って $\boxed{\textbf{19}}$ の答えは ③ である．

(2) A の逆行列 A^{-1} の (i, j) 成分は

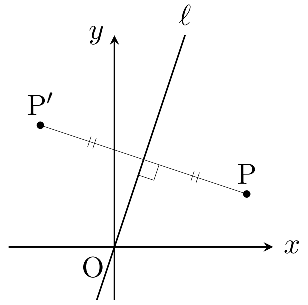
$$\frac{(-1)^{i+j}}{|A|} \times A \text{ から } j \text{ 行と } i \text{ 列を除いた行列の行列式}$$

であった．$x = 0$ のときの $|A|$ の値は (1) の答えに $x = 0$ を代入すると 1 である．また $x = 0$ のとき A から第 2 行と第 3 列を除いた行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

であるから A^{-1} の $(3, 2)$ 成分は $(-1)^{3+2}\frac{1}{1} = -1$ である．従って $\boxed{\textbf{20}}$ の答えは ⑦ である．

問 2　(1)　平面上の点 P(x, y) を直線 ℓ: $y = 3x$ に関して線対称な点 $\mathrm{P}'(x', y')$ にうつす変換について考える．2 つの点 P, P$'$ の中点は ℓ 上にあることから $\boxed{\textbf{21}}$ が成り立ち，直線 ℓ と線分 PP$'$ は直交するから $\boxed{\textbf{22}}$ が成り立つ．連立方程式 $\boxed{\textbf{21}}$，$\boxed{\textbf{22}}$ より x', y' を x, y を用いて表すと，線形変換



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \boxed{\textbf{23}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を得る．

$\boxed{\textbf{21}}$・$\boxed{\textbf{22}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x+x'}{2} = 3\dfrac{y+y'}{2}$　　① $\dfrac{x-x'}{2} = 3\dfrac{y-y'}{2}$

② $\dfrac{y+y'}{2} = 3\dfrac{x+x'}{2}$　　③ $\dfrac{y-y'}{2} = 3\dfrac{x-x'}{2}$

④ $3\dfrac{x'+x}{y'+y} = -1$　　⑤ $3\dfrac{x'-x}{y'-y} = -1$

⑥ $3\dfrac{y'+y}{x'+x} = -1$　　⑦ $3\dfrac{y'-y}{x'-x} = -1$

$\boxed{\textbf{23}}$ の解答群

⓪ $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　⑥ $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

解説

(1) 2 つの点 $\mathrm{P}(x,y)$, $\mathrm{P}'(x',y')$ の中点の座標は $\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$ である．これが直線 ℓ: $y=3x$ 上にあるので

$$\frac{y+y'}{2} = 3\frac{x+x'}{2} \ \cdots (\sharp)$$

が成り立つ．よって，$\boxed{\mathbf{21}}$ の答えは ② である．

次に線分 PP' と直線 ℓ が直交する条件を考える．一般に y 軸と並行でない 2 つの直線または線分の傾きがそれぞれ m, m' であるとき，これらが直交するための必要十分条件は $mm'=-1$ である．線分 PP' の傾きは $\dfrac{y'-y}{x'-x}$ であるから，PP' と直線 ℓ が直交する条件は

$$3\frac{y'-y}{x'-x} = -1 \ \cdots (\flat)$$

である。よって，$\boxed{\mathbf{22}}$ の答えは ⑦ である．

上で得られた $(\sharp), (\flat)$ について，x', y' について連立一次方程式を解く．まず $(\sharp)$ は

$$-3x'+y' = 3x-y \ \cdots (\sharp\sharp)$$

と同等である．また $(\flat)$ は

$$x'+3y' = x+3y \ \cdots (\flat\flat)$$

と同等である．よって $-3\times(\sharp\sharp)+(\flat\flat)$ を計算すると，$10x'=-8x+6y$ となり，

$$x' = -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y$$

を得る．またこの x' を $(\sharp\sharp)$ に代入すると，$-3\left(-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y\right)+y' = 3x-y$ となり，

$$y' = \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y$$

を得る．これらを列ベクトルとして表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y \\ \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって，$\boxed{\mathbf{23}}$ の答えは ④ である．

(2) xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1, -2, -3)$, $\mathrm{B}(2, 0, -1)$, $\mathrm{C}(4, -2, 0)$ を考える．このとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は $\boxed{\mathbf{24}}$ である．また，3 点 A, B, C を含む平面の方程式は $\boxed{\mathbf{25}} = 6$ となる．

$\boxed{\mathbf{24}}$ の解答群

⓪ 0

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑦ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑧ π

$\boxed{\mathbf{25}}$ の解答群

⓪ $x + y + z$　① $x + y - z$　② $x - y + z$　③ $x - y - z$

④ $x + y + 2z$　⑤ $x + y - 2z$　⑥ $x - y + 2z$　⑦ $x - y - 2z$

⑧ $2x + y + 2z$　⑨ $2x + y - 2z$　ⓐ $2x - y + 2z$　ⓑ $2x - y - 2z$

解説

(2) 本問は空間ベクトルに関する問題である．空間となると直線や平面などの幾何学的対象を直感的に捉えることが困難となるが，ベクトルを用いた計算により論理的に捉えることができる．

本問ではまず 2 つのベクトルのなす角を求める．同じ始点をもつ 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ としたとき，

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

を満たす．これを用いて θ の値を求める．まず与えられた条件から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-1, 0-(-2), -1-(-3)) = (1,2,2),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (4-1, -2-(-2), 0-(-3)) = (3,0,3)$$

となる．終点の各座標から始点の対応する座標を引く，ということを覚えておこう．これらの成分表示から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 2\cdot 3 = 9, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3,$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{3^2+0^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

となる．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ とおくと，$\cos\theta = \dfrac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるので，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ と求まる．よって，$\boxed{\mathbf{24}}$ は ② である．

次に，3 点 A, B, C を含む平面 S の方程式を求める．一般に平面に直交するベクトルを法ベクトルという．S に対する法ベクトルを $\vec{n}$ とおいたとき，S 上の任意の点 $\mathrm{X}(x,y,z)$ に対して，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}} = 0 \tag{$*$}$$

を満たす．これは法ベクトルの定義からわかる．$(*)$ を展開すると直線の方程式となる．

まず $\vec{n}$ を求めよう．これは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の外積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に相当する．$\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right), \vec{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$ としたとき $\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ と表せる．この式から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = (6, 3, -6)$$

と法ベクトルが求まる．したがって，$(*)$ より

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AX}} = 6(x-1) + 3(y+2) - 6(z+3) = 3(2x + y - 2z - 6) = 0$$

式を整理すると S の方程式は $2x + y - 2z = 6$ となる．したがって， $\boxed{\textbf{25}}$ は ⑨ である．

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について考える．

(1)　ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ において $\boxed{\textbf{26}}$ である．

$\boxed{\textbf{26}}$ の解答群

⓪ 1 次独立（線形独立）　　① 1 次従属（線形従属）

(2)　ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合（線形結合）

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \qquad (c_1, c_2, c_3 \text{ は定数})$$

として表す．この式を c_1, c_2, c_3 に関する連立 1 次方程式とみなして解くと

$$c_1 = \boxed{\textbf{27}}, \quad c_2 = \boxed{\textbf{28}}, \quad c_3 = -\frac{1}{4}$$

となる．

$\boxed{\textbf{27}}$・$\boxed{\textbf{28}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$　⑥ $\frac{3}{4}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ $-\frac{1}{4}$　ⓑ $-\frac{1}{2}$　ⓒ $-\frac{3}{4}$

解説

本問はベクトルの 1 次独立性について問うたものである．一般に，自然数 n に対して n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立（線形独立）であるとは，$p_1\boldsymbol{a}_1+p_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+p_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o}$ を満たす定数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ はすべて 0 となる場合しかない，ということである．ここで，$\boldsymbol{o}$ は零ベクトルである．特に対象としている数ベクトル空間の次元が n となる場合，これらのベクトルの組が 1 次独立であることと n 次正方行列 $A=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots \boldsymbol{a}_n)$ が行基本変形により単位行列に変形できることは同値となる．

また，この場合において $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立であることと，任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}$ がただ 1 つの解をもつことは同値である．すなわち，$p_1\boldsymbol{a}_1+p_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+p_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$ となる $p_1, p_2, \ldots, p_n$ がただ 1 通りに定まる．本問はそれらを個別に問うているが，結果としては $A\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}$ を解くだけで $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立かどうかも判別できる．このため，ここでは最初から設問 (2) の視点で解説を始める．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_3\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

と表わし，これを c_1, c_2, c_3 に関する連立 1 次方程式とみなす．その拡大係数行列

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -4 & 2\\ -1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

に対して，行基本変形をおこなう．まず，第 2 行から第 1 行の 2 倍を引いて -1 倍し，第 3 行に第 1 行を足して 2 で割ると

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

となる．次に，この行列の第 1 行から第 2 行の 2 倍を引き，第 3 行から第 2 行の 2 倍を引いて -4 で割ると

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/4\end{pmatrix}$$

となる．最後に，この行列の第 1 行に第 3 行の 5 倍を足し，第 2 行から第 3 行の 2 倍を引くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}$$

が得られる．以上の操作により行列 $(\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}_2\,\boldsymbol{v}_3)$ が単位行列になったので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立（線形独立）である．すなわち， $\boxed{\textbf{26}}$ は ⓪ となる．なお，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であることは $|\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3| = 8 \neq 0$ からもいえる．

(2) 得られた行列の末尾の列から，連立 1 次方程式の解として

$$c_1 = -\frac{1}{4},\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = -\frac{1}{4}$$

が得られる．よって， $\boxed{\textbf{27}}$ は ⓐ， $\boxed{\textbf{28}}$ は ⑤ となる．

問 4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ を用いて線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定める.

(1) $\operatorname{rank} A = \boxed{\mathbf{29}}$ である.

(2) f の核 $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ を求めるために連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解くと, その解は任意定数 s, t により

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{30}} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ \boxed{\mathbf{31}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される. したがって $\operatorname{Ker} f$ の次元は $\boxed{\mathbf{32}}$ である.

(3) f の像 $\operatorname{Im} f = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元は $\boxed{\mathbf{33}}$ である.

$\boxed{29}$ 〜 $\boxed{33}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
	⑦ −1	⑧ −2	⑨ −3	ⓐ −4	ⓑ −5	ⓒ −6

解説

(1) A に行基本変形を行うと

1	2	3	1	
2	5	5	4	② $-\ 2 \times$ ①
1	4	1	5	③ $-$ ①
1	2	3	1	
0	1	-1	2	
0	2	-2	4	③ $-\ 2 \times$ ②
1	2	3	1	① $-\ 2 \times$ ②
0	1	-1	2	
0	0	0	0	
1	0	5	-3	
0	1	-1	2	
0	0	0	0	

となるので $\mathrm{rank}A = 2$ である．よって $\boxed{\mathbf{29}}$ の答えは ② である．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ と置いて $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解こう．これを消去法で行うと, 結局 (1) の $\mathrm{rank}A$ を求めるための行基本変形と全く同じ計算を行うことになる．従って (1) の計算より

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 - 0 \end{cases}$$

となるので $x_3 = s,\ x_4 = t$ と置くと $x_1 = -5s + 3t,\ x_2 = s - 2t,\ x_3 = s,\ x_4 = t$ であるから

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5s + 3t \\ s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

従って $\boxed{\mathbf{30}}$ の答えは ⓑ であり, $\boxed{\mathbf{31}}$ の答えは ⑧ である．また $\mathrm{Ker}f$ の任意のベク

トルは上式が示しているように 1 次独立な 2 本のベクトル $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形結合で表せるので $\mathrm{Ker}f$ の次元は 2 である．従って $\boxed{\mathbf{32}}$ の答えは② である．

(3) f の像 $\mathrm{Im}f$ は A の列ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ の張るベクトル部分空間であり，この空間の次元は A の階数に等しく，2 である．従って $\boxed{\mathbf{33}}$ の答えは ② である．

他に次元定理より像の次元を求めることが出来る．次元定理とは "線形写像 f について $\mathrm{Ker}f$ の次元と $\mathrm{Im}f$ の次元の和は f の定義域の空間の次元に等しい" という内容の定理である．今の場合は

$$4 = \mathbb{R}^4 \text{ の次元 } = \mathrm{Ker}f \text{ の次元 } + \mathrm{Im}f \text{ の次元 } = 2 + \mathrm{Im}f \text{ の次元}$$

であるからこれから像の次元が 2 であることが分かる．

問 5　定数 a に対し，行列 $A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の対角化可能性について考える．

(1)　A の固有方程式を解くと，$a \neq$ $\boxed{\textbf{34}}$ のとき，A の固有値は a（重複度 2）と $\boxed{\textbf{34}}$ である．また，ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{35}} \\ \boxed{\textbf{35}}^{\,2} \end{pmatrix}$$

は固有値 $\boxed{\textbf{34}}$ の固有ベクトルとなる．

(2)　$a =$ $\boxed{\textbf{36}}$ のとき，A の 1 次独立（線形独立）な固有ベクトルが 3 つとれる．したがって，このとき A は対角化可能である．また $a \neq$ $\boxed{\textbf{36}}$ のとき，A は対角化可能ではない．

$\boxed{\textbf{34}}$ ・ $\boxed{\textbf{36}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ -1　⑤ -2　⑥ -3

$\boxed{\textbf{35}}$ の解答群

⓪ a　① $a-1$　② $a-2$　③ $2a$　④ $2a-1$　⑤ $2a-3$

⑥ $-a$　⑦ $1-a$　⑧ $2-a$　⑨ $-2a$　ⓐ $1-2a$　ⓑ $3-2a$

解説

本問は行列の対角化可能性を問う問題である．行列の対角化の計算を問う問題は頻出されているので忘れている学生も多いかもしれないが，一般にはすべての正方行列が対角化できるとは限らない．

n を自然数としたとき，B を n 次正方行列，$\boldsymbol{x}$ を零ベクトル $\mathbf{0}$ でない n 次元列ベクトルとする．もしある定数 λ を用いて $B\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ と表せるとき，λ を B の固有値，$\boldsymbol{x}$ を λ に関する固有ベクトルという．B が対角化可能であるための必要十分条件として，B の 1 次独立（線形独立）な固有ベクトルが n 個取れることが挙げられる．本問ではこの条件を用いて対角化可能性を判別する．

(1) λ を変数としたとき，$\varphi_B(\lambda) = |B - \lambda E_n|$ を B の固有多項式，$\varphi_B(\lambda) = 0$ を B の固有方程式という．ここで E_n は n 次単位行列である．固有方程式の解が B の固有値となる．

さて，本問の場合の固有方程式を実際に計算すると

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & a-1 & 1 \\ 0 & a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

したがって，$a \neq 2$ のとき，A の固有値は a（重複度 2）と 2 になる．これより $\boxed{\mathbf{34}}$ は ② である．

次に，固有値 2 に関する固有ベクトルの 1 つを求める．本問の出題形式から未知数 c を用いて $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$ と表せる．固有ベクトルの定義から $\boldsymbol{x}$ は $(A - 2E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たすので

$$(A-2E_3)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a-2 & a-1 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 + (a-1)c + a - 2 \\ c^2 + (a-2)c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．これより c は 2 つの方程式 $c^2 + (a-1)c + a - 2 = 0$, $c^2 + (a-2)c = 0$ を同時に満たす．後者の方程式を解くと $c = 0, 2-a$ となる．$c = 0$ のとき，前者の方程式に代入すると $a = 2$ となるが，これは $a \neq 2$ と矛盾する．$c = 2 - a$ のときは同様に代入すると前者の方程式も満たす．以上により $\boxed{\mathbf{35}}$ は ⑧ である．

本問では問題のヒントからこのように解いたが，一般の場合では (2) で示すように連立 1 次方程式を解くことで固有ベクトルを求めることに注意しよう．

(2) 本題となる A の対角化可能性について考察する．(1) では固有値 2 に関する固有ベクトルを 1 つ求めた．また事実として，異なる固有値の固有ベクトルたちは 1 次独立となる．これらのことから，A の 1 次独立な固有ベクトルが 3 つとれるためには，固有値 a に関する固有ベクトルで 1 次独立なものが 2 つとれることが必要十分である．

固有値 a に関する固有ベクトルを $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $(\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0})$ とおくと，$(A - aE_3)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす．これは $y_1, y_2,$

y_3 に関する斉次方程式となる．左辺を展開すると結果的には

$$(a-1)y_2 + y_3 = 0, \qquad y_3 = 0, \qquad (2-a)y_3 = 0$$

をすべて満たす y_1, y_2, y_3 を求めればよい．ここで，y_1 はこれらの式中に現れていないので，この値は任意の数で構わないことに注意しよう．2 番目の式から 3 番目の式は成り立つ．また同じ式から 1 番目の式は $(a-1)y_2 = 0$ となる．$a \neq 1$ のとき $y_2 = 0$ である．このとき，0 でない定数 s を用いて

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．つまり，固有値 a の固有ベクトルで 1 次独立なものは 1 つしかとれないので，この場合 A は対角化可能ではない．

$a = 1$ のとき任意の y_2 について方程式は成り立つ．したがって，ともに 0 とはならない定数の組 (s, t) を用いて

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．すなわち，固有値 $a(=1)$ の固有ベクトルで 1 次独立なものが 2 つとれるので，この場合 A は対角化可能である．すなわち，$\boxed{\textbf{36}}$ は ① となる．なお，(1) の結果と合わせて

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が A の 3 つの固有ベクトルで 1 次独立なものとなる．$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$ と定めるとこれは A の対角化行列となり，実際に

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化される．

最後に，余談ではあるが行列の対角化の一般化としてジョルダン標準形と呼ばれるものがある．これは任意の正方行列に対して適用可能であり，曖昧な表現にはなるが正方行列を対角行列に近い形に変形させることができる，というものである．興味がある人は調べてみてほしい．

第3分野　常微分方程式

〔問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{37}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{53}}$ 〕

(注意)　各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　微分方程式

$$(*) \qquad y' = 2(2-x)y^2$$

について考える．

(1)　$(*)$ の一般解は任意定数 C を用いて

$$y = \boxed{\mathbf{37}}$$

で与えられる．

$\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群

⓪ $x+C$	① x^2-4x+C	② x^2-2x+C
③ $\dfrac{1}{x}+C$	④ $\dfrac{1}{x^2-4x}+C$	⑤ $\dfrac{1}{x^2-2x}+C$
⑥ $\dfrac{1}{x+C}$	⑦ $\dfrac{1}{x^2-4x+C}$	⑧ $\dfrac{1}{x^2-2x+C}$

(2)　$(*)$ の解 $y(x) = \boxed{\mathbf{37}}$ が初期条件

$$y(0) = \frac{1}{10}$$

を満たすとき，$C = \boxed{\mathbf{38}}$ である．

$\boxed{\mathbf{38}}$ の解答群

⓪ 0	① 2	② 4	③ 6	④ 8	⑤ 10
	⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{4}$	⑧ $\dfrac{1}{6}$	⑨ $\dfrac{1}{8}$	ⓐ $\dfrac{1}{10}$

(3)　(2) の解 $y(x)$ は実数 x について常に正の値をとり，$x <$ $\boxed{\textbf{39}}$ のとき $y'(x) > 0$ であり，$x >$ $\boxed{\textbf{39}}$ のとき $y'(x) < 0$ である．したがって $y(x)$ は $x =$ $\boxed{\textbf{39}}$ において最大値 $\boxed{\textbf{40}}$ をとる．

$\boxed{\textbf{39}}$ ・ $\boxed{\textbf{40}}$ の解答群

⓪ 0	① 2	② 4	③ 6	④ 8	⑤ 10
	⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{4}$	⑧ $\dfrac{1}{6}$	⑨ $\dfrac{1}{8}$	ⓐ $\dfrac{1}{10}$

解説

(1)　1 階の微分方程式が

$$g(y)y' = f(x)$$

の形に帰着できるとき，変数分離形であるという．

$(*)$ の場合 $y \neq 0$ とすると $g(y) = \dfrac{1}{y^2}$, $f(x) = 2(2-x)$ として

$$\frac{1}{y^2}y' = -(2x-4)$$

と変数分離できる．両辺を積分すれば

$$-\frac{1}{y} = -(x^2 - 4x + C) \qquad (C \text{ は任意定数})$$

を得る．よって，一般解として

$$y = \frac{1}{x^2 - 4x + C} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

を得る．したがって，$\boxed{\textbf{37}}$ の答えは ⑦ である．

ここで，変数分離の際に除かれた $y = 0$ は $y' = 0 = 2(2-x)y^2$ を満たすので，これも $(*)$ の解である．$y = 0$ は一般解からは得られない解であり，特異解という．

(2)　(1) で得られた一般解に $x = 0$ を代入すると，$y(0) = \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{10}$ となり，$C = 10$ である．したがって，$\boxed{\textbf{38}}$ の答えは ⑤ である．

(3) (2) で得られた解 $y(x)$ は

$$y = \frac{1}{(x-2)^2+6}$$

と表され，すべての実数 x について $y(x) > 0$ である．また，微分方程式 $(*)$ の解なので，

$$(*) \qquad y'(x) = 2(2-x)y(x)^2$$

を満たす．よって，$x < 2$ のとき $y'(x) > 0$, $x > 2$ のとき $y'(x) < 0$ であることがわかる．よって，$y(x)$ は $x = 2$ で最大値をとり，最大値は $y(2) = \dfrac{1}{6}$ である．以上より，$\boxed{\textbf{39}}$ の答えは ①，$\boxed{\textbf{40}}$ の答えは ⑧である．

問 2 解答群にある微分方程式の中から，以下の文章にあてはまるものをそれぞれ 1 つ選べ．

(1) 関数 $y = \cos 2x - \sin 2x$ を解としてもつ微分方程式は $\boxed{\mathbf{41}}$ である．

(2) 関数 $y = 2e^{4x}$ を解としてもつ微分方程式は $\boxed{\mathbf{42}}$ である．

(3) 関数 $y = 4e^{2x}$ を解としてもつが，$y = 4e^{-2x}$ を解としてもたない微分方程式は $\boxed{\mathbf{43}}$ である．

(4) 微分方程式 $\boxed{\mathbf{44}}$ の一般解 $y = y(x)$ は $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 4$ を満たす．

$\boxed{\mathbf{41}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{44}}$ の解答群

⓪ $y' - 4 = 0$	① $y' + 4 = 0$
② $y' - 2y = 0$	③ $y' + 2y = 0$
④ $y'' - 2y = 0$	⑤ $y'' + 2y = 0$
⑥ $y'' - 4y = 0$	⑦ $y'' + 4y = 0$
⑧ $y'' - 3y' - 4y = 0$	⑨ $y'' - 3y' + 4y = 0$

解説

解答群の微分方程式はすべて定数係数の線形微分方程式である．解答群の微分方程式を上から順にみていこう．以下において，C，C_1, C_2 はすべて任意定数を表すとする．

⓪ と ① は $y' = a$（$a \neq 0$ は定数）の形である．よって，一般解が $y = ax + C$ で与えられ，$\boxed{\mathbf{41}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{43}}$ にはあてはまらない．しかし，⓪ の微分方程式 $y' = 4$ の一般解は $y = 4x + C$ で与えられ，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 4$ を満たす．よって，⓪ は $\boxed{\mathbf{44}}$ にあてはまる．

② と ③ は $y' = ay$（$a \neq 0$ は定数）の形なので，一般解は $y = Ce^{ax}$ で与えられる．これは微分方程式の基本ともいえる形なので覚えておくと良い．② の $y' = 2y$ の一般解は $y = Ce^{2x}$ として与えられるので，$C = 4$ を代入して得られる $y = 4e^{2x}$ を解に持つ．しかし $y = 4e^{-2x}$ を解としてもたないので ② は $\boxed{\mathbf{43}}$ にあてはまる．② と ③ はどちらも $\boxed{\mathbf{41}}$，$\boxed{\mathbf{42}}$，$\boxed{\mathbf{44}}$ にはあてはまらないことがすぐにわかる．

④ 〜 ⑨ は $y''+by'+cy = 0$（b, c は定数）の形をした微分方程式なので，$\lambda^2+b\lambda+c = 0$ の特性方程式の解（特性根）を求めると，一般解が容易に求められる．④, ⑥, ⑧ は特性根が相

異なる実数解 $\alpha \neq \beta$ となるので，一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ で与えられる．一方，⑤，⑦，⑨ は特性根が $p \pm qi$ $(q \neq 0)$ の虚数解となるので，一般解は $y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$ で与えられる．

このことに注意すると，⑦ は，特性方程式が $\lambda^2 + 4 = 0$ で特性根が $\lambda = \pm 2i$ なので，一般解が $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ と与えられることから，$C_1 = 1$, $C_2 = -1$ を代入して得られる $y = \cos 2x - \sin 2x$ を解に持つ．よって，⑦ は $\boxed{\mathbf{41}}$ にあてはまる．

⑧ は，特性方程式が $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ で特性根が $\lambda = 4,\ -1$ なので，一般解が $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$ で与えられ，$C_1 = 2$, $C_2 = 0$ を代入して得られる $y = 2e^{4x}$ を解に持つ．よって，⑧ は $\boxed{\mathbf{42}}$ にあてはまる．

残りの ④ 〜 ⑥，⑨ はいずれも特性根の値から，$\boxed{\mathbf{41}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{44}}$ のいずれにもあてはまらないことがわかる．⑥ は特性根が $\lambda = \pm 2$ なので，$y = 4e^{2x}$ と $y = 4e^{-2x}$ の両方を解に持つ．よって，⑥ は $\boxed{\mathbf{43}}$ にはあてはまらないことに注意しよう．

以上をまとめると，$\boxed{\mathbf{41}}$ の答えは ⑦，$\boxed{\mathbf{42}}$ の答えは ⑧，$\boxed{\mathbf{43}}$ の答えは ②，$\boxed{\mathbf{44}}$ の答えは ⓪ となる．

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad y' - 2y + \frac{1}{3}y^2 = 0$$

を初期条件 $y(0) = 1$ のもとで考える．

(1)　$y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ とおいて方程式 $(*)$ に代入すると，z に関する微分方程式

$$(**) \qquad \frac{dz}{dx} = \boxed{\mathbf{45}}$$

が得られる．

$\boxed{\mathbf{45}}$ **の解答群**

⓪ $2z + \dfrac{1}{3}$　① $-2z + \dfrac{1}{3}$　② $2x + \dfrac{1}{3}$　③ $-2x + \dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{2}{z} + 3$　⑤ $-\dfrac{2}{z} + 3$　⑥ $\dfrac{2}{x} + 3$　⑦ $-\dfrac{2}{x} + 3$

(2)　初期条件 $z(0) = \dfrac{1}{y(0)} = 1$ を満たす方程式 $(**)$ の解は

$$z(x) = \boxed{\mathbf{46}}$$

である．このとき $y(x) = \dfrac{1}{\boxed{\mathbf{46}}}$ より，$\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \boxed{\mathbf{47}}$ となる．

$\boxed{\mathbf{46}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{2}e^{-x} + \dfrac{1}{2}$　① $2e^{x} - 1$　② $\dfrac{5}{4}e^{-x} - \dfrac{1}{4}$

③ $\dfrac{5}{3}e^{-2x} - \dfrac{2}{3}$　④ $3e^{-2x} - 2$　⑤ $\dfrac{4}{5}e^{2x} + \dfrac{1}{5}$

⑥ $\dfrac{5}{6}e^{-2x} + \dfrac{1}{6}$　⑦ $-5e^{-x} + 6$　⑧ $\dfrac{7}{6}e^{2x} - \dfrac{1}{6}$

$\boxed{\mathbf{47}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ ∞

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -4　⑨ -6　ⓐ $-\infty$

解説

(1) この微分方程式 $(*)$ はベルヌーイの微分方程式であるので，$z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ と変換すると，線形微分方程式に帰着できる．

実際，$y = \dfrac{1}{z}$ を x で微分して得られる $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$ と $y = \dfrac{1}{z}$ を $(*)$ に代入すると，$-\dfrac{z'}{z^2} - \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{3z^2} = 0$ となるので，

$$(**) \qquad \frac{dz}{dx} = -2z + \frac{1}{3}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{45}}$ の答えは ① である．

(2) $(**)$ は変数分離形でもあるが，ここでは特に，$(**)$ が $z(x)$ に関する 1 階の線形微分方程式であることに着目し，積分因子を使って解いてみよう．

$$z' + 2z = \frac{1}{3}$$

の両辺に，積分因子 e^{2x} をかけると

$$e^{2x}z' + 2e^{2x}z = (e^{2x}z)' = \frac{1}{3}e^{2x}$$

となる．この両辺を積分すると $e^{2x}z = \dfrac{1}{6}e^{2x} + C$ より，一般解

$$z = Ce^{-2x} + \frac{1}{6} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

を得る．初期条件 $z(0) = \dfrac{1}{y(0)} = 1$ を代入すると, $z(0) = C + \dfrac{1}{6} = 1$ より，$C = \dfrac{5}{6}$ となるので

$$z(x) = \frac{5}{6}e^{-2x} + \frac{1}{6}$$

つまり，$\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは ⑥ である．このとき，$y(x) = \dfrac{6}{5e^{-2x} + 1}$ であるので，$\lim_{x \to \infty} y(x) = 6$ となる．よって，$\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは ④ である．

この $(*)$ のタイプの微分方程式は人口増加を表すロジスティック方程式

$$y' = ay - by^2 \qquad (a, b > 0 \text{ は定数})$$

としてよく知られている．この方程式の解 $y(x)$ は，$x \to \infty$ としたとき，初期値 $y(0)$ が正ならば，その値にかかわらず $\dfrac{a}{b}$ に近づく．ロジスティック方程式は，問 1 の微分方程式と同様に変数分離形なので，問 3 は変数分離によって解くこともできる．しかし，ここで述べた解法は計算が楽なので知っておくとよい．

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 4y' + 4y = -25\cos x$$

の一般解を求める．

(1)　$(*)$ の特殊解を

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

とおくと

$$A = \boxed{\mathbf{48}}, \quad B = \boxed{\mathbf{49}}$$

である．

$\boxed{48}$ ・ $\boxed{49}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

(2)　$(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

の一般解は $y_h = \boxed{\mathbf{50}}$ と表される．よって，$(*)$ の一般解は

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \boxed{\mathbf{50}} + \boxed{\mathbf{48}}\cos x + \boxed{\mathbf{49}}\sin x$$

である．

$\boxed{50}$ の解答群

⓪ $C_1e^{x} + C_2e^{-x}$	① $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$	② $C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$
③ $C_1e^{x} + C_2e^{2x}$	④ $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$	⑤ $C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$
⑥ $C_1e^{x} + C_2xe^{x}$	⑦ $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$	⑧ $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

(C_1, C_2 は任意定数)

解説

(1) 微分方程式 $(*)$ は定数係数の 2 階線形微分方程式である．また，未知関数 y およびその導関数を含まない非同次項 $-25\cos x$ があるので，$(*)$ は非同次である．対応する同次方程式 $y''-4y'+4=0$ の特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$ の解が $\lambda=2$ （重根）であることと，非同次項の形から，$(*)$ の特殊解の形は

$$y_p(x)=A\cos x+B\sin x \quad （A, B \text{ は定数}）$$

と類推できる．類推した y_p が $(*)$ の解になるように，これらの未定係数 A, B を決めていこう．y_p を $(*)$ に代入すると，$y_p'=-A\sin x+B\cos x,\quad y_p''=-A\cos x-B\sin x$ より，

$$\begin{aligned}&-A\cos x-B\sin x-4(-A\sin x+B\cos x)+4(A\cos x+B\sin x)\\&\quad=(3A-4B)\cos x+(4A+3B)\sin x=-25\cos x\end{aligned}$$

となる．左辺と右辺の係数を比較すると $3A-4B=-25,\ 4A+3B=0$ が得られるので，これより，$A=-3,\ B=4$ が求められる．よって，$\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは ⑧，$\boxed{\mathbf{49}}$ の答えは ④ である．

(2) (1) で求めた特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+4=0$ の解が $\lambda=2$ （重根）であったことから，同次方程式の一般解 y_h は

$$y_h=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x} \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは ⑦ であり，$(*)$ の一般解は

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}-3\cos x+4\sin x$$

と表される．

問 5 xy 平面において，正の実数 C をパラメータとする楕円群

$$(*) \qquad x^2 + 2y^2 = C$$

を考える．xy 平面から x 軸および y 軸を除いた領域において，$(*)$ で表されるすべての楕円と直交する曲線を求めたい．ここで，2 つの曲線が直交するとは，これらの曲線の交点において，それぞれの接線が直交するときをいう．まず，$(*)$ の両辺を x で微分することにより

$$y' = \boxed{\mathbf{51}}$$

が得られる．これは，楕円 $x^2 + 2y^2 = C$ 上の点 (x, y) での接線の傾きを表している．よって，$(*)$ で表される楕円に直交する曲線は

$$y' = \boxed{\mathbf{52}}$$

を満たす．この微分方程式を解くことにより，求める曲線の方程式は

$$y = \boxed{\mathbf{53}}$$

となる．

$\boxed{51}$ ・ $\boxed{52}$ の解答群

⓪ $2xy$	① xy^2	② $\dfrac{2x}{y}$	③ $\dfrac{x}{2y}$	④ $\dfrac{2y}{x}$	⑤ $\dfrac{y}{2x}$
⑥ $-\dfrac{1}{2xy}$	⑦ $-\dfrac{1}{xy^2}$	⑧ $-\dfrac{2x}{y}$	⑨ $-\dfrac{x}{2y}$	ⓐ $-\dfrac{2y}{x}$	ⓑ $-\dfrac{y}{2x}$

$\boxed{53}$ の解答群

⓪ Ax	① $x + A$	② Ax^2	③ $x^2 + A$
④ $A\sqrt{x}$	⑤ $\sqrt{x} + A$	⑥ Ax^3	⑦ $x^3 + A$

(A は 0 でない定数)

解説

楕円群を表す方程式 $(*)$ $x^2+2y^2=C$ の両辺を x について微分すると，

$$2x+4yy'=0$$

となる．今，$x=0$ および $y=0$ を除いた領域で考えているので，

$$y'=\frac{-2x}{4y}=-\frac{x}{2y}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{51}}$ の答えは ⑨ である．

これは，$(*)$ で表される楕円上の点 (x,y) での接線の傾きを表している．ここで，微分方程式

$$y'=\frac{2y}{x}$$

を考えると，$-\dfrac{x}{2y}\cdot\dfrac{2y}{x}=-1$ なので，この微分方程式の解 $y(x)$ が表す曲線は，$(*)$ で表される楕円に直交している．よって，$\boxed{\mathbf{52}}$ の答えは ④ である．

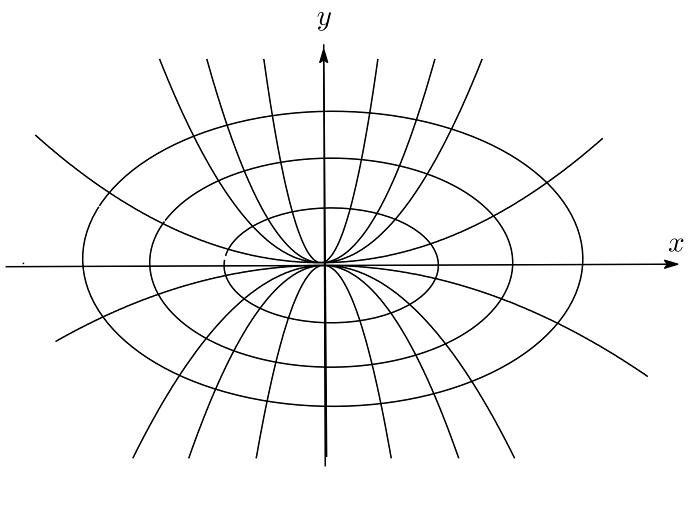
微分方程式 $y'=\dfrac{2y}{x}$ は，$x=0$ と $y=0$ を除いた領域において

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{x}$$

と変数分離されるので，積分すると

$$\log|y|=2\log|x|+C\quad(C\text{ は任意定数})$$

となり，$|y|=e^Cx^2$ である．ここで，$A=\pm e^C$ とおくと，$y=Ax^2$（A は 0 でない定数）となる．すなわち，$\boxed{\mathbf{53}}$ の答えは ② である．以上より，x 軸および y 軸を除いた領域において，$y=Ax^2$ の放物線群は楕円 $(*)$ の直交曲線群であることがわかった．



第４分野　確率・統計

〔問１～問４：解答番号 $\boxed{\mathbf{54}}$ ～ $\boxed{\mathbf{71}}$〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$，$V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問１ (1) 確率変数 X の確率分布が

X の値	-4	0	2	4
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{8}$

(a は定数)

で与えられている．このとき，$a=\boxed{\mathbf{54}}$ であり，

$$E(X)=\boxed{\mathbf{55}},\qquad V(X)=\boxed{\mathbf{56}}$$

が成り立つ．さらに，$Y=3-X$ に対し

$$E(Y)=2,\qquad V(Y)=\boxed{\mathbf{57}}$$

が成り立つ．

$\boxed{54}$ ～ $\boxed{57}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ -2	⑧ -5	⑨ $\frac{1}{2}$	ⓐ $\frac{1}{4}$	ⓑ $\frac{3}{4}$
ⓒ $\frac{1}{8}$	ⓓ $\frac{3}{8}$	ⓔ $\frac{5}{8}$	ⓕ $\frac{7}{8}$	ⓖ $\frac{1}{16}$	

(2) 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が，正の定数 α, β によって

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\beta x} & (x \geqq 0) \\ \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられていて，$E(X) = 4$ が成り立つとする．このとき，

$\alpha = \boxed{\mathbf{58}}$，　　$\beta = \boxed{\mathbf{59}}$

であり，$P(-1 < X \leqq 2) = \boxed{\mathbf{60}}$ である．

$\boxed{58}$ ～ $\boxed{60}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4
④ $\dfrac{1}{2}$	⑤ $\dfrac{1}{4}$	⑥ $1 - e^{-1}$	⑦ $1 - e^{-2}$
⑧ $1 - e^{-4}$	⑨ $1 - e^{-8}$	ⓐ $1 - e^{-\frac{1}{2}}$	ⓑ $1 - e^{-\frac{1}{4}}$
ⓒ $e - e^{-2}$	ⓓ $e^2 - e^{-4}$	ⓔ $e^{\frac{1}{2}} - e^{-1}$	ⓕ $e^{\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{2}}$

解説

(1) 全事象の確率は 1 であるから

$$\begin{aligned} 1 &= P(X=-4)+P(X=0)+P(X=2)+P(X=4) \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8} \\ &= a+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

なので，$a=\dfrac{1}{2}$ である．よって，$\boxed{\mathbf{54}}$ の答えは ⑨ である．このとき，X の期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &= (-4)\cdot P(X=-4)+0\cdot P(X=0)+2\cdot P(X=2)+4\cdot P(X=4) \\ &= -4\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{8} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-4)^2\cdot P(X=-4)+0^2\cdot P(X=0)+2^2\cdot P(X=2)+4^2\cdot P(X=4) \\ &= 16\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+16\cdot\frac{1}{8} \\ &= 6 \end{aligned}$$

であるから，X の分散は

$$V(X) = E(X^2)-E(X)^2 = 6-1^2 = 5$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{55}}$，$\boxed{\mathbf{56}}$ の答えは順に ①, ⑤ である．さらに，$Y=3-X$ について期待値と分散を求めると

$$\begin{aligned} E(Y) &= 3-E(X) = 2, \\ V(Y) &= (-1)^2\cdot V(X) = 5 \end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{57}}$ の答えは ⑤ である．

(2) 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が，正の定数 α, β によって

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\beta x} & (x \geqq 0) \\ \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられるとき，X は指数分布に従い

$$\alpha = \beta = \frac{1}{E(X)}$$

が成り立つ．実際に，全事象の確率は 1 であるから

$$1 \;=\; P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\beta x}\,dx = \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立ち，期待値は

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}$$

である．よって，$\alpha = \beta = \dfrac{1}{4}$ であるから，$\boxed{\textbf{58}}$, $\boxed{\textbf{59}}$ の答えは ⑤, ⑤ である．
また，

$$P(-1 < X \leqq 2) \;=\; \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \;=\; \int_0^2 \frac{1}{4}\,e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

であるから，$\boxed{\textbf{60}}$ の答えは ⓐ である．

問 2　確率変数 X, Y は独立で同じ分布に従い，その分布関数

$$F(x) = P(X \leqq x) = P(Y \leqq x)$$

について，$F(3) = \dfrac{2}{3}$ が成り立つと仮定する．このとき，$P(X \leqq 3, Y > 3) =$ $\boxed{\textbf{61}}$ である．また，確率変数 S, T を

$$S = \max(X, Y) = \begin{cases} X & (X \geqq Y \text{ のとき}) \\ Y & (X < Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$T = \min(X, Y) = \begin{cases} Y & (X \geqq Y \text{ のとき}) \\ X & (X < Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，

$$P(S \leqq x) = \boxed{\textbf{62}}, \qquad P(T \leqq x) = \boxed{\textbf{63}}$$

が成り立つ．また，確率変数 S, T は $\boxed{\textbf{64}}$ ．

$\boxed{\textbf{61}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{1}{4}$　⑥ $\dfrac{3}{4}$

⑦ $\dfrac{1}{6}$　⑧ $\dfrac{5}{6}$　⑨ $\dfrac{1}{9}$　ⓐ $\dfrac{2}{9}$　ⓑ $\dfrac{4}{9}$　ⓒ $\dfrac{5}{9}$

$\boxed{\textbf{62}}$ ・ $\boxed{\textbf{63}}$ の解答群

⓪ $F(x)$　① $F(x)^2$　② $1 - F(x)$

③ $1 - F(x)^2$　④ $F(x) - F(x)^2$　⑤ $F(x)^2 - F(x)$

⑥ $2F(x) - F(x)^2$　⑦ $F(x) - 2F(x)^2$　⑧ $2F(x)^2 - F(x)$

⑨ $F(x)^2 - 2F(x)$

$\boxed{\mathbf{64}}$ **の解答群**

⓪ 独立である　　① 従属である（独立でない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

解説

確率変数 X, Y は独立なので

$$\begin{aligned} P(X \leqq 3, Y > 3) &= P(X \leqq 3)P(Y > 3) \\ &= P(X \leqq 3)\{1 - P(Y \leqq 3)\} \\ &= F(3)\,(1 - F(3)) \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{61}}$ の答えは ⓐ である．また，確率変数 S, T について，定義より

$$\begin{aligned} P(S \leqq x) &= P(X \leqq x \text{かつ} Y \leqq x) = P(X \leqq x)P(Y \leqq x) = F(x)^2, \\ P(T \leqq x) &= P(X \leqq x \text{または} Y \leqq x) \\ &= P(X \leqq x) + P(Y \leqq x) - P(X \leqq x \text{かつ} Y \leqq x) \\ &= 2F(x) - F(x)^2 \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\boxed{\mathbf{62}}$，$\boxed{\mathbf{63}}$ の答えは順に ①, ⑥ である．もし，確率変数 S, T が独立であれば，全ての実数 x, y について

$$P(S \leqq x, T \leqq y) = P(S \leqq x)P(T \leqq y)$$

が成り立つ．しかし $x = y = 3$ のとき

$$\begin{aligned} P\,(S \leqq 3, T \leqq 3) = P\,(S \leqq 3) = F(3)^2 = \frac{4}{9}, \\ P\,(S \leqq 3)\,P\,(T \leqq 3) = F(3)^2(2F(3) - F(3)^2) = \frac{32}{81} \end{aligned}$$

であるから，S, T は独立でない（従属である）．よって，$\boxed{\mathbf{64}}$ の答えは ① である．

問 3　ある工業製品は，a, b の 2 社で 3 : 2 の割合で生産されている．a 社が自社の製品を調査したところ，不良品の割合は 5% であった．同様に，b 社では不良品の割合が 10% であった．生産された工業製品の中から無作為に取り出した 1 個が a, b 社の製品である事象をそれぞれ A, B とし，その取り出した 1 個が不良品である事象を F とする．このとき

$$P(A)=\frac{3}{5},\quad P(B)=\frac{2}{5},\quad P(F|A)=0.05,\quad P(F|B)=0.1$$

である．ここで，2 つの事象 C, D に対し，$P(C|D)$ は D が起こったときの C が起こる条件付き確率を表す．このとき，取り出した 1 個が不良品である確率は

$$P(F)=P(A\cap F)+P(B\cap F)=\boxed{\mathbf{65}}$$

である．また，取り出した 1 個が不良品であったとき，それが a 社の製品である確率は

$$P(A|F)=\boxed{\mathbf{66}}$$

である．

$\boxed{65}$・$\boxed{66}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{3}$	① $\frac{2}{3}$	② $\frac{1}{5}$	③ $\frac{2}{5}$	④ $\frac{3}{5}$
⑤ $\frac{1}{7}$	⑥ $\frac{3}{7}$	⑦ $\frac{4}{7}$	⑧ $\frac{1}{10}$	⑨ $\frac{1}{20}$
ⓐ $\frac{3}{20}$	ⓑ $\frac{1}{25}$	ⓒ $\frac{1}{100}$	ⓓ $\frac{3}{100}$	ⓔ $\frac{7}{100}$

解説

無作為に取り出した 1 個が，a 社で作られた不良品である確率，b 社で作られた不良品である確率はそれぞれ

$$P(A \cap F) = P(A)P(F|A) = \frac{3}{5} \cdot 0.05 = \frac{3}{100},$$
$$P(B \cap F) = P(B)P(F|B) = \frac{2}{5} \cdot 0.1 = \frac{2}{50}$$

である．したがって，無作為に取り出した 1 個が不良品である確率は

$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = \frac{3}{100} + \frac{2}{50} = \frac{7}{100}$$

である．よって，$\boxed{\textbf{65}}$ の答えは ⓔ である．また，取り出した 1 個が不良品であったとき，それが a 社の製品である確率は

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{3/100}{7/100} = \frac{3}{7}$$

である．よって，$\boxed{\textbf{66}}$ の答えは ⑥ である．

問 4　A 大学の U 教授の研究室では，キャンパスの池に生息するある種類のカエルの体長の調査を数年ぶりに行った．この池に生息するカエルの体長は正規分布に従い，体長の母分散は年によって変化はなく，$20^2\ \mathrm{mm}^2$ と仮定してよいことがわかっている．池からカエル 100 匹を無作為に捕まえてその体長を測定したところ，100 匹の標本平均値は 120 mm であった．この測定結果を用いて，池のカエルの体長の母平均 μ mm に関して，信頼度（信頼係数）95% の信頼区間を求めたい．

捕まえた 100 匹のカエルの体長を表す確率変数をそれぞれ $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とおくと，これらは独立で，すべて平均 μ，分散 20^2 の正規分布 $N(\mu, 20^2)$ に従っている．ゆえに標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は平均 μ，分散 $\boxed{\mathbf{67}}$ の正規分布 $N\left(\mu,\ \boxed{\mathbf{67}}\right)$ に従う．そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\mathbf{68}}}$$

とおけば，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表によれば

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかるので

$$P\left(\overline{X} - \boxed{\mathbf{69}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \boxed{\mathbf{69}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

となる．標本平均 $\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 120$ なので，求める信頼区間は $\boxed{\mathbf{70}}$ となる．なお，捕まえるカエルの数を 2 倍にすると，信頼区間の幅は $\boxed{\mathbf{71}}$ ．

$\boxed{\mathbf{67}}$ ・ $\boxed{\mathbf{68}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 8
⑥ 10　⑦ 20　⑧ 40　⑨ 100　ⓐ 200　ⓑ 400

$\boxed{\mathbf{69}}$ の解答群

⓪ 0.49　① 0.98　② 1.96　③ 3.92　④ 4.9　⑤ 7.84
⑥ 9.8　⑦ 15.68　⑧ 19.6　⑨ 39.2　ⓐ 78.4

$\boxed{\mathbf{70}}$ の解答群

⓪ $[119.51, 120.49]$	① $[119.02, 120.98]$	② $[118.04, 121.96]$
③ $[116.08, 123.92]$	④ $[115.1, 124.9]$	⑤ $[112.16, 127.84]$
⑥ $[110.2, 129.8]$	⑦ $[104.32, 135.68]$	⑧ $[100.4, 139.6]$
⑨ $[80.8, 159.2]$	ⓐ $[41.6, 198.4]$	

$\boxed{\mathbf{71}}$ の解答群

⓪ 変わらない	① $\sqrt{2}$ 倍になる	② 2 倍になる
③ 4 倍になる	④ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍になる	⑤ $\dfrac{1}{2}$ 倍になる
⑥ $\dfrac{1}{4}$ 倍になる		

解説

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立で，同じ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

も正規分布に従い，その平均と分散について

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) \quad (\mu \text{ が } n \text{ 個}) \\ &= \frac{n\mu}{n} = \mu \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} V(\overline{X}) &= \frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2\right) \quad (\sigma^2 \text{ が } n \text{ 個}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う．この問題では $n = 100, \sigma^2 = 20^2$ であるから，$\overline{X}$ の分散は $\dfrac{\sigma^2}{n} = 4$ である．よって，$\boxed{\mathbf{67}}$ の答えは④である．

次に，$\overline{X}$ を標準化するには，$\overline{X}$ から平均 μ を引き，標準偏差 $\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}} = 2$ で割ればよいので，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{2}$$

は標準正規分布に従う確率変数である．よって，$\boxed{\mathbf{68}}$ の答えは②である．

さて，正規分布表より

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} -1.96 \leqq Z \leqq 1.96 \ &\Leftrightarrow \ -1.96 \leqq \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leqq 1.96 \\ &\Leftrightarrow \ \overline{X} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \\ &\Leftrightarrow \ \overline{X} - 3.92 \leqq \mu \leqq \overline{X} + 3.92 \end{aligned}$$

であるから，

$$P\left(\overline{X} - 3.92 \leqq \mu \leqq \overline{X} + 3.92\right) \fallingdotseq 0.95$$

を得る．よって， $\boxed{\textbf{69}}$ の答えは ③ である．標本平均 $\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 120$ なので，信頼度（信頼係数）95% の信頼区間は $[120 - 3.92, 120 + 3.92]$ である．よって， $\boxed{\textbf{70}}$ の答えは ③ である．捕まえるカエルの数を 2 倍にすると，n が 2 倍，すなわち $\overline{X}$ の標準偏差 $\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}$ は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍になるから，信頼区間の幅も $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍になる．よって， $\boxed{\textbf{71}}$ の答えは ④ である．