EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2009年12月12日（土）

4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊ 受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．

(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(8) 試験開始 40 分後から退席を認める．

(9) 問題冊子は持ち帰ること．

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．

(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も相応しいものを指定された解答群から選んで解答用紙にマークすること．ただし，解答群に相応しいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．
例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して ⓒ と解答する場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(4) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第1分野	微分積分	……	3
第2分野	線形代数	……	11
第3分野	常微分方程式	……	17
第4分野	確率・統計	……	25

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 6 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

問１　次の極限を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right) = \boxed{\mathbf{1}},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x^2} = \boxed{\mathbf{2}}.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ -2　① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

⑥ 2　⑦ ∞　⑧ $-\infty$

問２　関数 $\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ で表す. $f(x)$ を

$$f(x) = x + \tan^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

で定義される関数とするとき,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\mathbf{3}}, \qquad f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\mathbf{4}}$$

である.

$\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1

④ $\dfrac{\pi}{6}$　⑤ $\dfrac{\pi}{4}$　⑥ $\dfrac{\pi}{3}$

$\boxed{4}$ の解答群

⓪ -2　① $-\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{2}{5}$　③ $\dfrac{3}{7}$

④ $\dfrac{4}{7}$　⑤ $\dfrac{7}{4}$　⑥ $\dfrac{7}{3}$　⑦ $\dfrac{5}{2}$

⑧ $\sqrt{6}-2$　⑨ $4-2\sqrt{3}$　ⓐ $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ⓑ $1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

問 3　s を正の定数として，積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx}\cos x\,dx$ を求める．まず，部分積分法により

$$\begin{aligned}\int e^{-sx}\cos x\,dx &= e^{-sx}\sin x + \int \boxed{\mathbf{5}}\,dx \\ &= e^{-sx}\sin x - \boxed{\mathbf{6}} - \int \boxed{\mathbf{7}}\,dx\end{aligned}$$

である．これより

$$\int e^{-sx}\cos x\,dx = \boxed{\mathbf{8}} + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

となる．この不定積分を利用して，

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\cos x\,dx = \boxed{\mathbf{9}}$$

が得られる．

$\boxed{5}$ ・ $\boxed{6}$ ・ $\boxed{7}$ の解答群

⓪ $e^{-sx}\sin x$　① $e^{-sx}\cos x$　② $se^{-sx}\sin x$

③ $se^{-sx}\cos x$　④ $s^2e^{-sx}\sin x$　⑤ $s^2e^{-sx}\cos x$

⑥ $\dfrac{1}{s}e^{-sx}\sin x$　⑦ $\dfrac{1}{s}e^{-sx}\cos x$　⑧ $\dfrac{1}{s^2}e^{-sx}\sin x$

⑨ $\dfrac{1}{s^2}e^{-sx}\cos x$

$\boxed{8}$ の解答群

⓪ $\dfrac{e^{-sx}}{s^2+1}(\sin x + s\cos x)$　① $\dfrac{e^{-sx}}{s^2+1}(\sin x - s\cos x)$

② $\dfrac{e^{-sx}}{s^2-1}(\sin x + s\cos x)$　③ $\dfrac{e^{-sx}}{s^2-1}(\sin x - s\cos x)$

④ $\dfrac{se^{-sx}}{s^2+1}(s\sin x + \cos x)$　⑤ $\dfrac{se^{-sx}}{s^2+1}(s\sin x - \cos x)$

⑥ $\dfrac{se^{-sx}}{s^2-1}(s\sin x + \cos x)$　⑦ $\dfrac{se^{-sx}}{s^2-1}(s\sin x - \cos x)$

$\boxed{9}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{s^2+1}$　① $-\dfrac{1}{s^2+1}$　② $\dfrac{1}{s^2-1}$　③ $-\dfrac{1}{s^2-1}$

④ $\dfrac{s}{s^2+1}$　⑤ $-\dfrac{s}{s^2+1}$　⑥ $\dfrac{s}{s^2-1}$　⑦ $-\dfrac{s}{s^2-1}$

問 4 関数 $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2$ を考える．$z = f(x,y)$ のグラフ上の点 $(1, 1, f(1,1))$ における接平面の方程式は

$$\boxed{\textbf{10}}\,x + \boxed{\textbf{11}}\,y - z = \boxed{\textbf{12}}$$

である．

$\boxed{\textbf{10}}$・$\boxed{\textbf{11}}$・$\boxed{\textbf{12}}$ の解答群

⓪ 1	① -1	② 2	③ -2	④ 3	⑤ -3
⑥ 4	⑦ -4	⑧ 5	⑨ -5	ⓐ 6	ⓑ -6
ⓒ 7	ⓓ -7	ⓔ 8	ⓕ -8	ⓖ 9	ⓗ -9

問 5 関数 $F(x,y)$ は連続な偏導関数

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

をもつとする．$y = y(x)$ が x の関数として微分可能であるとき，

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \boxed{\textbf{13}}$$

である．

$\boxed{\textbf{13}}$ の解答群

⓪ $F\left(1, \dfrac{dy}{dx}(x)\right)$

① $\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(1, \dfrac{dy}{dx}(x)\right)$

② $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))\dfrac{dy}{dx}(x)$

③ $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\dfrac{dy}{dx}(x)$

④ $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + F\left(x, \dfrac{dy}{dx}(x)\right)$

⑤ $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))$

⑥ $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\dfrac{dy}{dx}(x)$

計算用紙

問 6　xy 平面上の集合 D が

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 1\right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$\iint_D xe^{y^2} dxdy$$

の値を求める．D は

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq 1,\ \boxed{\textbf{14}} \leqq x \leqq \boxed{\textbf{15}}\right\}$$

と表されるので，

$$\iint_D xe^{y^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\boxed{\textbf{14}}}^{\boxed{\textbf{15}}} xe^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 \boxed{\textbf{16}}\, dy = \boxed{\textbf{17}}$$

である．

14 ・ **15** **の解答群**

⓪ 0　① 1　② y　③ y^2　④ $\sqrt{y}$

16 **の解答群**

⓪ e^{y^2}　① $\dfrac{1}{2}e^{y^2}$　② ye^{y^2}　③ $\dfrac{y}{2}e^{y^2}$　④ $y^2e^{y^2}$

⑤ $\dfrac{y^2}{2}e^{y^2}$　⑥ $y^4e^{y^2}$　⑦ $\dfrac{y^4}{4}e^{y^2}$

17 **の解答群**

⓪ $\dfrac{e-2}{2}$　① $\dfrac{e-1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{e-1}{2}$　④ 1

⑤ $e-1$　⑥ $\dfrac{e}{4}$　⑦ $\dfrac{e}{2}$　⑧ e

計算用紙

第２分野　線形代数

〔 問１～ 問４ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{18}}$ ～ $\boxed{\mathbf{33}}$ 〕

問１ $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるとき，A の行列式は $|A| = \boxed{\mathbf{18}}$ である．また，A の逆行列 A^{-1} の $(4,4)$ 成分は $\boxed{\mathbf{19}}$ である．

$\boxed{\mathbf{18}}$ ・ $\boxed{\mathbf{19}}$ の解答群

⓪ -8	① -7	② -6	③ -5	④ -4	⑤ -3	⑥ -2
⑦ -1	⑧ 0	⑨ 1	ⓐ 2	ⓑ 3	ⓒ 4	ⓓ 5
ⓔ 6	ⓕ 7	ⓖ 8				

問 2　3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 1 \\ 2x - 3y - 7z = 3 \\ -x + 2z = a \end{cases}$$

について考える．ただし，a は定数である．

(1)　この連立方程式が解をもつのは，$a = \boxed{\textbf{20}}$ のときである．

(2)　$a = \boxed{\textbf{20}}$ のとき，連立方程式の解は，任意定数 t を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \boxed{\textbf{21}} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{22}} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

(3)　$a = \boxed{\textbf{20}}$ のとき，係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の階数と，拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -7 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

の階数は等しく，$\boxed{\textbf{23}}$ である．

$\boxed{20}$ ～ $\boxed{23}$ の解答群

⓪ -5	① -4	② -3	③ -2	④ -1	⑤ 0
⑥ 1	⑦ 2	⑧ 3	⑨ 4	ⓐ 5	

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 個のベクトル

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}c\\-1\\2\end{pmatrix}$$

を考える．ただし，c は定数とする．

(1)　$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 次従属 (線形従属) であるとき，$c = \boxed{\mathbf{24}}$ である．

(2)　$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなすとき，$c = \boxed{\mathbf{25}}$ である．

(3)　$c = \boxed{\mathbf{25}}$ の場合，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}$ は実数 α, β, γ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}$$

と表すことができる．このとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ の内積は $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} = \boxed{\mathbf{26}}$ であるから，$\alpha = \boxed{\mathbf{27}}$ である．

$\boxed{\mathbf{24}}$ ・ $\boxed{\mathbf{25}}$ の解答群

⓪ -6　① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1　⑥ 0

⑦ 1　⑧ 2　⑨ 3　ⓐ 4　ⓑ 5　ⓒ 6

$\boxed{\mathbf{26}}$ ・ $\boxed{\mathbf{27}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ -1　⑥ $\sqrt{2}$　⑦ $-\sqrt{2}$　⑧ $\sqrt{3}$　⑨ $-\sqrt{3}$

ⓐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$　ⓑ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　ⓒ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　ⓓ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　ⓔ $\frac{1}{\sqrt{6}}$

ⓕ $-\frac{1}{\sqrt{6}}$　ⓖ $\frac{2}{\sqrt{6}}$　ⓗ $-\frac{2}{\sqrt{6}}$

計算用紙

問 4　$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　A の固有値は $\boxed{\mathbf{28}}$ と $\boxed{\mathbf{29}}$ である．ただし，$\boxed{\mathbf{28}} < \boxed{\mathbf{29}}$ とする．

(2)　E を 2 次の単位行列，O を 2 次の零行列とする．実数 a, b が $a = \boxed{\mathbf{30}}$，$b = \boxed{\mathbf{31}}$ のとき，

$$A^2 + aA + bE = O$$

が成り立つ．

(3)　A^3 は実数 $c = \boxed{\mathbf{32}}$, $d = \boxed{\mathbf{33}}$ を用いて

$$A^3 = cA + dE$$

と表すことができる．

$\boxed{\mathbf{28}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{33}}$ の解答群

⓪ -8	① -7	② -6	③ -5	④ -4	⑤ -3	⑥ -2
⑦ -1	⑧ 0	⑨ 1	ⓐ 2	ⓑ 3	ⓒ 4	ⓓ 5
ⓔ 6	ⓕ 7	ⓖ 8				

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{34}$ 〜 $\boxed{46}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問 1　初期値問題

$$y' + 2y = -2, \qquad y(0) = a$$

の解 y について考える.

(1)　解が定数関数 $y = a$ となるのは $a = \boxed{34}$ のときである.

(2)　$a = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$y = \boxed{35}$ である.

$\boxed{34}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ -1
⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4			

$\boxed{35}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{1}{2}e^{2x}$	① $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$	② $-1+\dfrac{1}{2}e^{2x}$
③ $-1+\dfrac{1}{2}e^{-2x}$	④ $-\dfrac{1}{2}\cos x$	⑤ $-\dfrac{1}{2}e^{x}\cos x$
⑥ $-\dfrac{1}{2}e^{-x}\cos x$		

計算用紙

問 2　初期値問題

$$y'' + 2y' + by = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

の解 y について考える．ただし，b は定数である．

(1)　$b = 2$ のとき，$y = \boxed{\mathbf{36}}$ である．

(2)　$b = \boxed{\mathbf{37}}$ のとき，$y = xe^{-x}$ である．

(3)　$b = \boxed{\mathbf{38}}$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{1}{2}$ である．

$\boxed{\mathbf{36}}$ の解答群

⓪ x	① e^x	② e^{-x}	③ $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
④ $x\cos x$	⑤ $e^x \sin x$	⑥ $e^{-x}\sin x$	

$\boxed{\mathbf{37}}$ ・ $\boxed{\mathbf{38}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4	

計算用紙

問 3　微分方程式

$$(*)\qquad y'' + p^2 y = 2\cos 3x$$

について考える．ただし，p は正の定数である．

(1)　$(*)$ に対応する同次方程式 $y'' + p^2 y = 0$ の一般解は $y =$ $\boxed{\textbf{39}}$ である．

(2)　$p \neq$ $\boxed{\textbf{40}}$ のとき，$(*)$ の一般解は定数 A を用いて $y =$ $\boxed{\textbf{39}}$ $+ A\cos 3x$ と表すことができる．A は p を用いて $A =$ $\boxed{\textbf{41}}$ と表される．

(3)　$p =$ $\boxed{\textbf{40}}$ のとき，$(*)$ の 一般解は $y =$ $\boxed{\textbf{39}}$ $+$ $\boxed{\textbf{42}}$ $x\sin 3x$ である．

$\boxed{\textbf{39}}$ の解答群

⓪ $C_1 e^{p} + C_2 e^{-p}$　① $C_1 e^{px} + C_2 e^{-px}$

② $C_1 e^{p^2 x} + C_2 e^{-p^2 x}$　③ $C_1 \cos p + C_2 \sin p$

④ $C_1 \cos px + C_2 \sin px$　⑤ $C_1 \cos p^2 x + C_2 \sin p^2 x$

$(C_1, C_2$ は任意定数$)$

$\boxed{\textbf{40}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{9}$　① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

⑥ 3　⑦ 6　⑧ 9

$\boxed{\textbf{41}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2}{p^2}$　① $\dfrac{2}{p^2-1}$　② $\dfrac{2}{p^2+1}$　③ $\dfrac{2}{p^2-3}$

④ $\dfrac{2}{p^2+3}$　⑤ $\dfrac{2}{p^2-9}$　⑥ $\dfrac{2}{p^2+9}$

$\boxed{\textbf{42}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{9}$　① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$

④ 2　⑤ 3　⑥ 6　⑦ 9

計算用紙

問 4　質点が速さの 2 乗に比例した抵抗力を受けながら x 軸上を正の向きに運動している．時刻 t での質点の速度を $v(t)$ とすると，v は微分方程式

(a)　$\dfrac{dv}{dt} = -kv^2$

を満たす．ここで k は正の定数とする．また，以下では $t \geqq 0$ とする．

まず，質点の初速度を $v(0) = V$ (ただし，$V > 0$) として方程式 (a) を解くと

(b)　$v(t) = \boxed{\mathbf{43}}$

となる．したがって，$v(t)$ が $\dfrac{V}{2}$ に等しくなる時刻は $t = \boxed{\mathbf{44}}$ である．

次に，時刻 t での質点の位置を $x(t)$ とする．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = \boxed{\mathbf{43}}$ を初期条件 $x(0) = 0$ のもとで解くと

(c)　$x(t) = \boxed{\mathbf{45}}$

を得る．(b) と (c) から t を消去すると，v は x の関数として $v = \boxed{\mathbf{46}}$ と表すことができる．

$\boxed{43}$ の解答群

⓪ Ve^{-kt}　① Ve^{-kVt}　② $\dfrac{V}{kt+1}$

③ $\dfrac{V}{kVt+1}$　④ $\dfrac{V}{2kVt+1}$　⑤ $V\left(1-\dfrac{3kt}{V^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\boxed{44}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{k}$　① $\dfrac{1}{kV}$　② $\dfrac{1}{2kV}$　③ $\dfrac{\log 2}{k}$

④ $\dfrac{\log 2}{kV}$　⑤ $\dfrac{7V^3}{24k}$

$\boxed{45}$ の解答群

⓪ $\dfrac{V}{k}(1-e^{-kt})$　① $kV(1-e^{-kt})$　② $\dfrac{1}{k}(1-e^{-kVt})$

③ $kV^2(1-e^{-kVt})$　④ $\dfrac{1}{k}\log(kVt+1)$　⑤ $\dfrac{V}{k}\log(kt+1)$

$\boxed{\mathbf{46}}$ **の解答群**

⓪ Ve^{-kx}　① Ve^{-kVx}　② $V - kx$

③ $V - kVx$　④ $V\left(1 - \dfrac{2kx}{V^4}\right)^{\frac{1}{4}}$　⑤ $V\left(1 - \dfrac{4kx}{V^4}\right)^{\frac{1}{4}}$

第４分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{47}}$ 〜 $\boxed{\textbf{66}}$ 〕

(注意) $P(A)$ は事象 A の起こる確率を表す.

問 1 (1) 確率変数 X の確率分布が

X の値	2	3	4
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	c

(c は定数とする)

で与えられている．このとき $c =$ $\boxed{\textbf{47}}$ で，X の期待値は $E(X) =$ $\boxed{\textbf{48}}$ である.

$\boxed{\textbf{47}}$ ・ $\boxed{\textbf{48}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{4}{11}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{7}{13}$

⑥ $\frac{4}{9}$　⑦ $\frac{5}{9}$　⑧ $\frac{7}{9}$　⑨ $\frac{13}{6}$　ⓐ $\frac{19}{6}$　ⓑ $\frac{11}{3}$

(2) 確率変数 X の期待値が $E(X) = 2$，分散が $V(X) = 1$ であるとき，$E(X^2) =$ $\boxed{\textbf{49}}$ である.

$\boxed{\textbf{49}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

(3) 1 から 6 までのすべての目が $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るさいころを全部で 30 回投げたときに，1 または 2 の目が出た回数を X とする． このとき X の期待値は $E(X) = \boxed{\textbf{50}}$ である．

$\boxed{\textbf{50}}$ **の解答群**

⓪ 5	① 6	② 7	③ 8	④ 9	⑤ 10
⑥ 12	⑦ 15	⑧ $\dfrac{10}{3}$	⑨ $\dfrac{20}{3}$	ⓐ $\dfrac{10}{9}$	ⓑ $\dfrac{20}{9}$

(4) 0 以上の値をとる確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \geqq 0$$

で与えられているとき，分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ は

$$F(x) = \boxed{\textbf{51}}, \quad x \geqq 0$$

となるから，$P(1 < X \leqq 2) = \boxed{\textbf{52}}$ である．

$\boxed{\textbf{51}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{x+1}$	③ $\dfrac{x}{x+1}$
④ $\dfrac{2}{x+1}$	⑤ $\dfrac{-1}{x+1}$	⑥ $\dfrac{-2}{(x+1)^3}$	

$\boxed{\textbf{52}}$ **の解答群**

⓪ 0	① $\dfrac{1}{6}$	② $\dfrac{1}{3}$	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $\dfrac{5}{9}$
⑤ $\dfrac{2}{3}$	⑥ $\dfrac{7}{9}$	⑦ 1		

問 2　確率変数 X, Y は，

$$(*) \qquad \begin{cases} P(X=1, Y=1) = \dfrac{1}{9}, \quad P(X=1, Y=2) = \dfrac{2}{9}, \\ P(X=2, Y=1) = \dfrac{4}{9}, \quad P(X=2, Y=2) = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

を満たすとする．このとき，$P(X=1) = \boxed{\mathbf{53}}$ である．また，$P(Y=1) = \boxed{\mathbf{54}}$ である．これらと $(*)$ から，X と Y は $\boxed{\mathbf{55}}$ ．

$\boxed{53}$ ・ $\boxed{54}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{9}$　② $\dfrac{2}{9}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{4}{9}$

⑤ $\dfrac{5}{9}$　⑥ $\dfrac{2}{3}$　⑦ $\dfrac{7}{9}$　⑧ $\dfrac{8}{9}$　⑨ 1

$\boxed{55}$ の解答群

⓪ 独立である　① 従属である（独立でない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

計算用紙

問 3　ある工場では 2 つの機械 α, β を使用して，同じ製品を作っている． それぞれの機械で全体の 60%, 40% の製品を作っており，α で生産される製品が不良品である確率は $\dfrac{1}{100}$, β で生産される製品が不良品である確率は $\dfrac{1}{200}$ であるという．

いま，任意に取り出した製品が α で作られた製品である事象を A, β で作られた製品である事象を B で表す．また，任意に取り出した製品が不良品である事象を F で表す．このとき，α で生産される製品が不良品である確率は事象 A が起こったときの事象 F の起こる条件付き確率 $P(F|A)$ で表されるので，$P(F|A) = \dfrac{1}{100}$ である．同様に β で生産される製品が不良品である確率は $P(F|B) = \dfrac{1}{200}$ であるから，

$$P(A \cap F) = \boxed{\mathbf{56}}, \quad P(B \cap F) = \boxed{\mathbf{57}}, \quad P(F) = \boxed{\mathbf{58}}$$

となる．したがって，1 つの製品が不良品であるとき，これが機械 α により作られたものである条件付き確率 $P(A|F)$ は $\boxed{\mathbf{59}}$ となる．

$\boxed{56}$ ・ $\boxed{57}$ ・ $\boxed{58}$ の解答群

⓪ 0　① 0.001　② 0.002　③ 0.003　④ 0.004

⑤ 0.005　⑥ 0.006　⑦ 0.007　⑧ 0.008　⑨ 0.01

$\boxed{59}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{2}{3}$

計算用紙

問 4 同じ親魚から同時に生まれた多くの稚魚を１年間非常に大きな池で同じ条件で育てた．１年後に稚魚を無作為に $n = 100$ 匹捕獲し，これらの体長（標本）を $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とする．いま，実際に捕獲したところ，

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{100}) = (78, 95, \ldots, 105) \quad 単位：\mathrm{mm}$$

で，$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{1}{100}(78 + 95 + \cdots + 105) = 93.0$ となっていた．

過去の経験から，同じ親魚から同時に生まれた稚魚の１年後の体長は母平均 μ, 母分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとする．昨年までの母平均は 95 に等しい．一方，母分散は変化がなく $\sigma^2 = 12^2$ であるとわかっている．

このとき，今年の母平均の変化を調べるために母平均 μ に対する両側検定を行うことにし，$\mu_0 = 95$ として

帰無仮説 H_0 : $\mu = \mu_0$,

対立仮説 H_1 : $\mu \neq \mu_0$

と設定する．

ここで $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とおくと，$\overline{X}$ は平均 $\boxed{\mathbf{60}}$, 分散 $\boxed{\mathbf{61}}$ の正規分布に従うので，H_0 のもとで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

は平均 0, 分散 1 の標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．正規分布表から

$$P(-1.65 < Z < 1.65) = 0.9$$

となるので，$1.65 \times \dfrac{12}{\sqrt{100}} = 1.98$ に注意すると，これから，

$$P\left(|\overline{X} - 95| \geqq 1.98\right) = \boxed{\mathbf{62}}$$

がわかる．これに対して標本平均値 $\overline{x}$ は

$$|\overline{x} - 95| = 2.0 > 1.98$$

を満たすから，有意水準 $\boxed{\mathbf{63}}$ % で H_0 は $\boxed{\mathbf{64}}$．

また，

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$$

を用いて，同様の議論を行うと，H_0 は有意水準 $\boxed{\mathbf{65}}$ % で $\boxed{\mathbf{66}}$．

$\boxed{60}$ ・ $\boxed{61}$ **の解答群**

⓪ μ	① $n\mu$	② $\dfrac{\mu}{n}$	③ σ	④ $n\sigma$
⑤ σ^2	⑥ $n\sigma^2$	⑦ $n^2\sigma^2$	⑧ $\dfrac{\sigma^2}{n}$	⑨ $\dfrac{\sigma^2}{n^2}$

$\boxed{62}$ ・ $\boxed{63}$ ・ $\boxed{65}$ **の解答群**

⓪ 0.05	① 0.1	② 0.9	③ 0.95	④ 2.5
⑤ 5	⑥ 10	⑦ 90	⑧ 95	⑨ 97.5

$\boxed{64}$ ・ $\boxed{66}$ **の解答群**

⓪ 棄却される　　① 棄却されない