EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2018年12月8日（土）

4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) 机の右上に学生証を提示すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(4) マークには **HB** または **B** の鉛筆 (またはシャープペンシル) を使用すること．
(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．
(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(8) 問題冊子は持ち帰ること．
(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\mathbf{23}}$ は ($\boxed{\mathbf{23}}$) という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

目次

第 1 分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$，$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1　次の 2 つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+3}\right) = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{3}{2}$	④ $\dfrac{5}{2}$	⑤ $\dfrac{1}{3}$
⑥ $\dfrac{2}{3}$	⑦ $\dfrac{4}{3}$	⑧ -1	⑨ $-\dfrac{1}{2}$	ⓐ $-\dfrac{3}{2}$	ⓑ $-\dfrac{5}{2}$
ⓒ $-\dfrac{1}{3}$	ⓓ $-\dfrac{2}{3}$	ⓔ $-\dfrac{4}{3}$	ⓕ ∞	ⓖ $-\infty$	

解説

1 つ目の極限 $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+3}\right)$ は $\infty-\infty$ の不定形である．計算すると

$$
\begin{aligned}
x-\sqrt{x^2+x+3} &= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+3}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x+3}\right)}{x+\sqrt{x^2+x+3}} \\
&= \frac{x^2-\left(x^2+x+3\right)}{x+\sqrt{x^2+x+3}} \\
&= \frac{-x-3}{x+\sqrt{x^2+x+3}} \\
&= \frac{-1-\dfrac{3}{x}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}
\end{aligned}
$$

となるので

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+3}\right)=-\frac{1}{2}$$

である．したがって，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ⑨ である．

2 つ目の極限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}$ は $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形の極限である．ロピタルの定理を 2 回使うと

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-3\sin 3x+2\sin 2x}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-9\cos 3x+4\cos 2x}{2} \\
&= -\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

であるから，$\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ⓑ である．

問 2　$-1 \leqq x \leqq 1$ において，関数

$$f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1}(x^2)$$

を考える．

(1)　$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\mathbf{3}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群

⓪ 0	① π	② $\dfrac{\pi}{2}$	③ $\dfrac{\pi}{4}$	④ $\dfrac{3\pi}{4}$
⑤ $\dfrac{\pi}{12}$	⑥ $\dfrac{5\pi}{12}$	⑦ $\dfrac{7\pi}{12}$	⑧ $\dfrac{11\pi}{12}$	⑨ $-\pi$
ⓐ $-\dfrac{\pi}{2}$	ⓑ $-\dfrac{\pi}{4}$	ⓒ $-\dfrac{3\pi}{4}$	ⓓ $-\dfrac{\pi}{12}$	ⓔ $-\dfrac{5\pi}{12}$
ⓕ $-\dfrac{7\pi}{12}$	ⓖ $-\dfrac{11\pi}{12}$			

(2)　$f(x)$ は $x = \boxed{\mathbf{4}}$ で最大となり，$x = \boxed{\mathbf{5}}$ で最小となる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ ・ $\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{3}$	④ $\dfrac{1}{4}$
⑤ $\dfrac{1}{5}$	⑥ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	⑨ -1
ⓐ $-\dfrac{1}{2}$	ⓑ $-\dfrac{1}{3}$	ⓒ $-\dfrac{1}{4}$	ⓓ $-\dfrac{1}{5}$	ⓔ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
ⓕ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	ⓖ $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$			

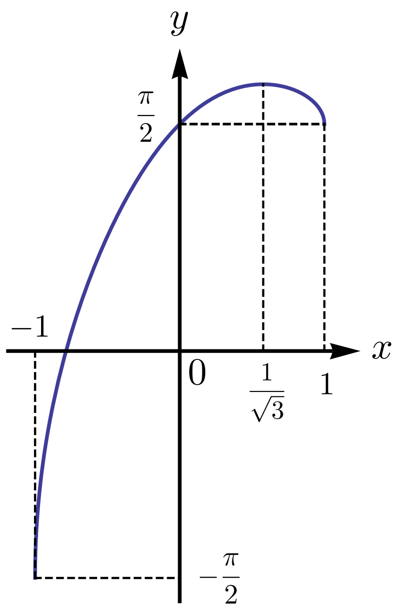
解説

(1) $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos^{-1}\dfrac{1}{2} = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$ より，$\boxed{\textbf{3}}$ の答えは ⑤ である．

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ が $-1 < x < 1$ であるときに成り立つ．このとき，$f'(x) = 0$ の解 x は $1 - \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ の解，すなわち $\sqrt{1+x^2} = 2x$ の解であり，$\sqrt{1+x^2} > 0$ だから $x > 0$ を満たすことがわかる．$\sqrt{1+x^2} = 2x$ を 2 乗すると，$1 + x^2 = 4x^2$ だから，$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る．$\left(x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ は } x > 0 \text{ に反する}\right)$ $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$，$f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ であることを確かめてから，$f(x)$ の増減表を作ると

x	-1	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

となり，$y = f(x)$ のグラフを描くと下図のようになる．



これより，$f(x)$ が最大となるのは $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときで，最小となるのは $x = -1$ のときであることがわかる．よって，$\boxed{\textbf{4}}$ と $\boxed{\textbf{5}}$ の答えは，それぞれ ⑦ と ⑨ である．因みに，$f(x)$ の最大値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ は，およそ 0.588π であることが電卓などで確かめられる．

問 3　不定積分

$$I = \int \frac{x^4 + 6x^2 + 27}{x^2 - 2x + 5}\,dx$$

を計算する．被積分関数は

$$\frac{x^4 + 6x^2 + 27}{x^2 - 2x + 5} = x^2 + 2x + \boxed{\mathbf{6}} + \frac{\boxed{\mathbf{7}}}{x^2 - 2x + 5}$$

と変形され，さらに

$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$$

であるから

$$I = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \boxed{\mathbf{6}}\,x + \boxed{\mathbf{8}} + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

となる．

6 ・ **7** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

8 の解答群

⓪ $\log\{(x-1)^2 + 4\}$	① $2\log\{(x-1)^2 + 4\}$
② $\tan^{-1}(x-1)$	③ $2\tan^{-1}(x-1)$
④ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}(x-1)$	⑤ $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{2}$
⑥ $2\tan^{-1}\dfrac{x-1}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{x-1}{2}$

解説

まず，被積分関数の割り算を実行すると，商 x^2+2x+5 と余り 2 を得る．よって

$$\frac{x^4+6x^2+27}{x^2-2x+5} = x^2+2x+5+\frac{2}{x^2-2x+5}$$

となるので， $\boxed{\mathbf{6}}$ の答えは ⑤， $\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ② である．

次に，右辺の x^2+2x+5 の積分の計算は容易なので，分数項 $\dfrac{2}{x^2-2x+5}$ の積分を考えよう．問題文にあるように $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$ が成り立つので

$$\begin{aligned}\int\frac{2}{x^2-2x+5}dx &= 2\int\frac{1}{(x-1)^2+2^2}dx\\ &= 2\int\frac{1}{t^2+2^2}dt \qquad (\text{ここで } t=x-1 \text{ とした})\end{aligned}$$

となる．さらに公式

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$$

を適用すれば

$$\int\frac{2}{x^2-2x+5}dx=\tan^{-1}\frac{t}{2}+C=\tan^{-1}\frac{x-1}{2}+C$$

を得る．結果として

$$\int\frac{x^4+6x^2+27}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+5x+\tan^{-1}\frac{x-1}{2}+C$$

となり， $\boxed{\mathbf{8}}$ の答えは ⑤ である．

問 4　(1)　xyz 空間において，関数

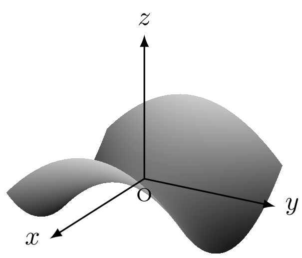
$$z = \sqrt{1 - x^2}$$

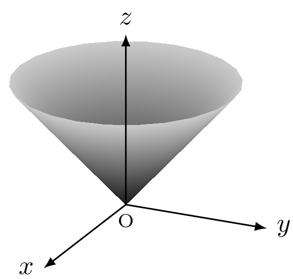
が表す曲面の概形は $\boxed{\textbf{9}}$ であり，関数

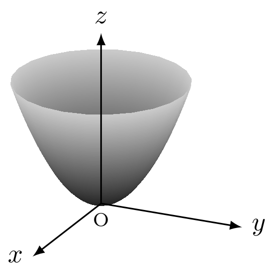
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

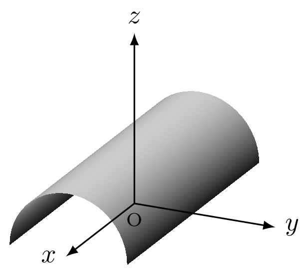
が表す曲面の概形は $\boxed{\textbf{10}}$ である．

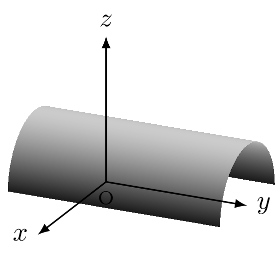
$\boxed{\textbf{9}}$ ・ $\boxed{\textbf{10}}$ の解答群

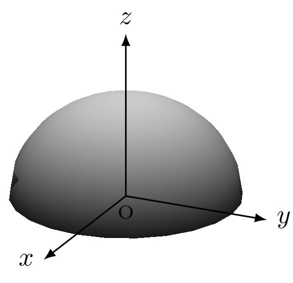
⓪


①


②


③


④


⑤


(2) 関数 $f(t)$ は t について 2 回微分可能とする．いま，$g(x,y)=f(x-2y)$ とおくと

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \boxed{\mathbf{11}}\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

が成り立つ．特に，$f(t)=\sin t$ すなわち $g(x,y)=\sin(x-2y)$ であるとき

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \boxed{\mathbf{12}}\,g$$

が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ ・ $\boxed{\mathbf{12}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

解説

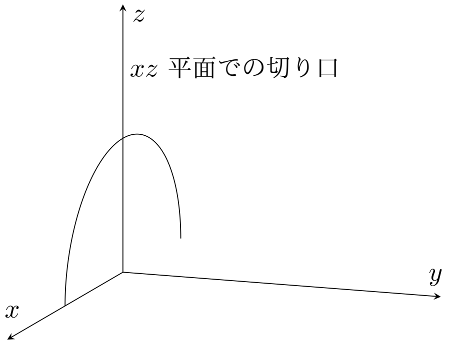
(1) 3 次元空間において $z=f(x,y)$ のグラフを手で描くのは大変難しい. 具体的な式が与えられた時はパソコンなどを用いて描画するのが得策である. ただ，式の形によっては，容易に描ける場合がある. 例えば

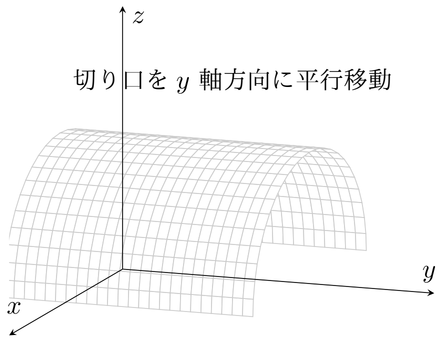
$$z=g(x)$$

のように，式の中に y が入っておらず，x のみの関数となっている場合を考えてみよう．点 $\mathrm{P}(a,b,c)$ がこの関数のグラフ上にあるということは,「$c=g(a)$ が成り立つこと」と同値であるが，これは b には無関係であるから，b は何でもよいことになる．言い換えると，$\mathrm{P}(a,b,c)$ がグラフ上にあれば, P を y 軸方向に平行移動した $\mathrm{Q}(a,b',c)$ もグラフ上にある．したがって，y 軸と直交する平面とグラフの切り口を考え，それを y 軸方向に平行移動してできる図形が $z=g(x)$ のグラフである．y 軸と直交する平面として xz 平面 $(y=0)$ が考えやすい．この xz 平面において $z=g(x)$ のグラフを描き，それを y 軸の (正負の両) 方向に平行移動してできる面が $z=g(x)$ のグラフである．特に

$$z=\sqrt{1-x^2}$$

の場合は xz 平面で曲線 $z=\sqrt{1-x^2}$ (原点を中心に持ち, 半径 1 の円の上半分) を描き，それを y 軸方向に平行移動してできる軌跡がなす曲面である．





したがって $\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは ④ である．

今度は

$$z = h(\sqrt{x^2+y^2})$$

の形の関数のグラフについて考えよう．少し遠回りになるが，xy 平面上の原点を中心とする回転を表す行列の復習をしておこう．まず，原点 O と 点 A(x,y) を結ぶ線分の長さが r で，x 軸となす角が θ のとき，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ が成り立つ．この点 P(x,y) を原点を中心として角 α だけ回転した点を B(X,Y) とおけば，原点 O と 点 B(X,Y) を結ぶ線分の長さも r で，x 軸となす角は $\alpha+\theta$ であるから

$$\begin{cases} X = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y \\ Y = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta = (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \end{cases}$$

である．この式は行列を用いて表すことが可能であり

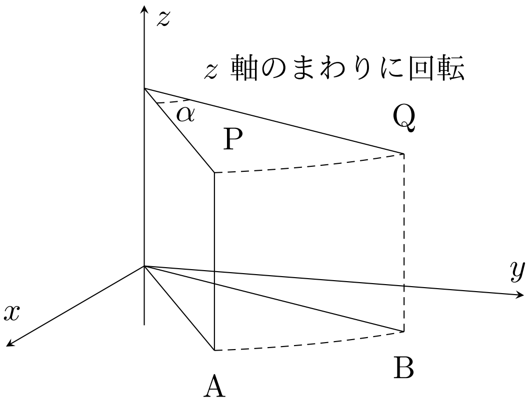
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる．

さて，点 P(a,b,c) が $z = h(\sqrt{x^2+y^2})$ のグラフ上にあるための条件は，$c = h(\sqrt{a^2+b^2})$ が成り立つことである．P(a,b,c) を z 軸のまわりに角 α だけ回転した点を Q(a',b',c') と置けば，z 座標は変化せず，x, y 座標が角 α の回転を受けるので

$$\begin{cases} a' = & a\cos\alpha - b\sin\alpha, \\ b' = & a\sin\alpha + b\cos\alpha, \\ c' = & c \end{cases}$$

が成り立つ．



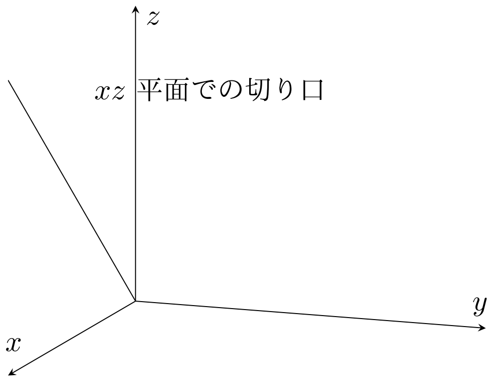
このとき

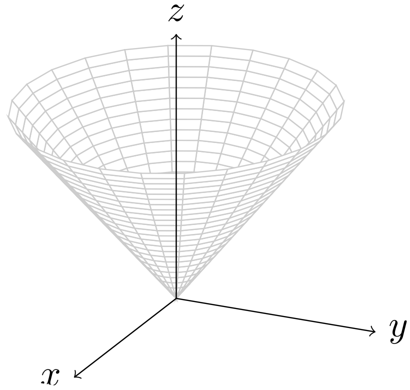
$$
\begin{aligned}
{a'}^2 + {b'}^2 &= (a\cos\alpha - b\sin\alpha)^2 + (a\sin\alpha + b\cos\alpha)^2 \\
&= (a^2+b^2)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

であるから

$$
h(\sqrt{(a')^2+(b')^2}) = h(\sqrt{a^2+b^2}) = c = c'
$$

が成り立つ．つまり点 Q も，$z = h(\sqrt{x^2+y^2})$ のグラフ上にある．したがって，そのグラフは z 軸のまわりの回転面と言うことができる．z 軸のまわりの回転面は，z 軸を含むある平面に関する切り口を z 軸のまわりに 1 回転することによって得られる．例えば xz 平面 $(y=0)$ との切り口を考えよう．$x \geqq 0$ の部分に制限すれば $z = h(\sqrt{x^2+y^2}) = h(\sqrt{x^2+0^2}) = h(x)$ となるので，xz 平面の $x \geqq 0$ の部分に $z = h(x)$ の曲線を描き，それを z 軸のまわりに 1 回転すればよい．特に，$z = \sqrt{x^2+y^2}$ は $y=0$, $x \geqq 0$ としたとき $z = \sqrt{x^2+0^2} = x$ となるので，そのグラフは xz 平面上の $x \geqq 0$ の部分に半直線 $z = x$ を描き，それを z 軸のまわりに回転した面である．





したがって $\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ① である．

(2) $t = x - 2y$ と置けば

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -2$$

である．よって合成関数の偏微分の公式より $g(x, y) = f(x - 2y) = f(t)$ について

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) =& \frac{df}{dt}(t)\frac{\partial t}{\partial x} = f'(x - 2y),\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) =& \frac{df}{dt}(t)\frac{\partial t}{\partial y} = -2f'(x - 2y)\end{aligned}$$

を得る．$f(x - 2y)$ の代わりに $f'(x - 2y)$ について同様な計算を行うと

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) =& \frac{\partial}{\partial x} f'(x - 2y) = f''(x - 2y)\\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) =& \frac{\partial}{\partial x}(-2f'(x - 2y)) = -2f''(x - 2y)\\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) =& \frac{\partial}{\partial y}(-2f'(x - 2y)) = 4f''(x - 2y)\end{aligned}$$

となる．したがって $\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ④ である．また上式より

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 3f''(x - 2y)$$

である．$f(t) = \sin t$ のとき $f''(t) = -\sin t$ であるから

$$3f''(x - 2y) = -3\sin(x - 2y) = -3g(x, y)$$

となるので， $\boxed{\mathbf{12}}$ の答えは ⓑ である．

問 5　a, b を正の定数とする．xy 平面内の集合 D が

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D xy\,dxdy$$

の値を求める．変数変換 $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ を行うと，(r, θ) の集合

$$E = \left\{ (r, \theta) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq \boxed{\mathbf{13}},\ 0 \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{14}} \right\}$$

は D に対応する．また，変数変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{15}}$$

であるので

$$I = \iint_E \boxed{\mathbf{16}} \sin\theta\cos\theta\,drd\theta = \boxed{\mathbf{17}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{13}}$ ・ $\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{4}$	① $\frac{1}{2}$	② $\frac{3}{4}$	③ 1	④ $\frac{3}{2}$	⑤ 2
⑥ $\frac{\pi}{4}$	⑦ $\frac{\pi}{2}$	⑧ $\frac{3\pi}{4}$	⑨ π	ⓐ $\frac{3\pi}{2}$	ⓑ 2π

$\boxed{\mathbf{15}}$ ～ $\boxed{\mathbf{17}}$ の解答群

⓪ 0	① ab	② $\frac{ab}{2}$	③ $\frac{ab}{4}$	④ $\frac{ab}{8}$
⑤ a^2b^2	⑥ $\frac{a^2b^2}{2}$	⑦ $\frac{a^2b^2}{4}$	⑧ $\frac{a^2b^2}{8}$	⑨ abr
ⓐ abr^2	ⓑ abr^3	ⓒ a^2b^2r	ⓓ $a^2b^2r^2$	ⓔ $a^2b^2r^3$

解説

与えられた集合 D は，2 軸の長さが $2a$ と $2b$ である楕円の右上 4 分の 1 である．変数変換 $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ を考えると

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(br\sin\theta)^2}{b^2} = r^2 \leqq 1$$

となるので， $0 \leqq r \leqq 1$ が成り立つ．また D は x 軸の正の部分と y 軸の正の部分に挟まれているので，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ がわかる．したがって $\boxed{\mathbf{13}}$ の答えは ③， $\boxed{\mathbf{14}}$ の答えは ⑦ である．

変数変換のヤコビ行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

となる．したがって $\boxed{\mathbf{15}}$ の答えは ⑨ である．以上より，積分を計算すると

$$\begin{aligned} I &= \iint_E (ar\cos\theta)(br\sin\theta)abr\,drd\theta \\ &= \iint_E a^2b^2r^3\sin\theta\cos\theta\,drd\theta \qquad (\text{よって } \boxed{\mathbf{16}} \text{ の答えは ⓔ である}) \\ &= a^2b^2\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= \frac{a^2b^2}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta \qquad (\text{ここで } 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta \text{ を用いた}) \\ &= \frac{a^2b^2}{8} \end{aligned}$$

となり， $\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ⑧である．

第 2 分野　線形代数

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{18}}$ ～ $\boxed{\textbf{33}}$ 〕

問 1　(1)　等式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つように a, b, c を定めるとき，$a = \boxed{\textbf{18}}$，$b = \boxed{\textbf{19}}$ である．

$\boxed{\textbf{18}}$ ・ $\boxed{\textbf{19}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

(2)　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．ただし，$p^2 + q^2 > 0$ とする．$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x}$ がなす角は $\boxed{\textbf{20}}$ である．

$\boxed{\textbf{20}}$ の解答群

⓪ 0	① π	② $\dfrac{\pi}{2}$	③ $\dfrac{\pi}{3}$	④ $\dfrac{2\pi}{3}$	⑤ $\dfrac{\pi}{4}$
⑥ $\dfrac{3\pi}{4}$	⑦ $\dfrac{\pi}{6}$	⑧ $\dfrac{5\pi}{6}$			

解説

(1)　左辺の行列の積を計算すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c-1 & b+1-c \\ a+2c-2 & b+2-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{cases} a+c-1=2, \\ a+2c-2=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} b+1-c=0, \\ b+2-2c=2 \end{cases}$$

が成り立つ．これを解いて $a=4,\ b=-2,\ c=-1$ を得る．したがって $\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ④ であり，$\boxed{\mathbf{19}}$ の答えは ⓐ である．

(2)　$\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x}$ のなす角を $\theta\ (0 \leq \theta \leq \pi)$ とおけば，$\boldsymbol{x} \cdot (A\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}||A\boldsymbol{x}|\cos\theta$ であるから

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot (A\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}||A\boldsymbol{x}|}$$

が成り立つ．ここで

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので

$$|A\boldsymbol{x}| = \sqrt{(p-q)^2+(p+q)^2} = \sqrt{2(p^2+q^2)}$$

$$\boldsymbol{x} \cdot (A\boldsymbol{x}) = p(p-q)+q(p+q) = p^2+q^2$$

を得る．したがって

$$\cos\theta = \frac{p^2+q^2}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{2(p^2+q^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ であり，$\boxed{\mathbf{20}}$ の答えは ⑤ である．

問 2　次の行列 A, B, C, D を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)　逆行列をもつものをすべてあげると，$\boxed{\textbf{21}}$ である．

(2)　列ベクトル 3 つが 1 次従属（線形従属）であるものをすべてあげると，$\boxed{\textbf{22}}$ である．

(3)　行列式の値が 1 に等しいものをすべてあげると，$\boxed{\textbf{23}}$ である．

$\boxed{\textbf{21}}$ ～ $\boxed{\textbf{23}}$ の解答群

⓪ A	① B	② C
③ D	④ A, B	⑤ A, C
⑥ A, D	⑦ B, C	⑧ B, D
⑨ C, D	ⓐ A, B, C	ⓑ A, B, D
ⓒ A, C, D	ⓓ B, C, D	ⓔ A, B, C, D

解説

3 次正方行列 M に対して，次は同値である．

- M が逆行列をもつ．
- M の 3 つの列ベクトルが 1 次独立（線形独立）である．
- M の 3 つの行ベクトルが 1 次独立（線形独立）である．
- M の行列式が 0 でない．

行列 B は第 3 行が零ベクトルであるから，3 つの行ベクトルは 1 次従属（線形従属）である．したがって，B は逆行列を持たず，行列式は 0 である．

行列 A, C, D について，行列式の性質

- ある行 (または列) の何倍かしたものを他の行 (または列) に加えても，行列式の値は変わらない．
- 2 つの行 (または列) どうしを入れ替えると，行列式の値は -1 倍になる．
- 上三角行列 (対角成分よりも下側の成分がすべて 0 の行列) の行列式の値は，対角成分の積に等しい．
- n 次正方行列 N と定数 α に対し，$|\alpha N| = \alpha^n |N|$ が成り立つ．

を利用して行列式の値を計算すると，

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|C| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

$$|D| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8 = 1$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{21}}$ の答えは ⓒ，$\boxed{\textbf{22}}$ の答えは ①，$\boxed{\textbf{23}}$ の答えは ⑥ である．

問 3 定数 a を含む連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x - y + az = a \\ -6x + 2ay - (5a+3)z = -9a+9 \\ -ax + ay - (2a+3)z = -2a-3 \end{cases}$$

について考える．なお，その拡大係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & a \\ -6 & 2a & -5a-3 & -9a+9 \\ -a & a & -2a-3 & -2a-3 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) A の階数（ランク）が 2 となるのは，$a = \boxed{\mathbf{24}}$ のときである．このとき，方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \boxed{\mathbf{24}} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \boxed{\mathbf{25}} \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

と表される．

(2) A の階数（ランク）が 1 となるのは，$a = \boxed{\mathbf{26}}$ のときである．このとき，方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{26}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{27}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s,\ t \text{ は任意定数})$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{24}}$ ～ $\boxed{\mathbf{27}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

解説

行列 A に対し，第 1 行の 6 倍を第 2 行に加え，第 1 行の a 倍を第 3 行に加える操作 (行基本操作) を行うと，行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & a \\ 0 & 2a-6 & a-3 & -3a+9 \\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & a^2-2a-3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & a \\ 0 & 2(a-3) & a-3 & -3(a-3) \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & (a+1)(a-3) \end{pmatrix}$$

を得る．これを B とおく．

(1) A の階数が 2 となるのは，B の第 3 行はすべて 0 の行となるが，第 2 行はそうならない場合であるから，$a=-1$ のときであることが直ちにわかる．よって，$\boxed{\textbf{24}}$ の答えは ⑨ である．このとき，問題文から，方程式 $(*)$ の解 x, y, z のうち，x と y がそれぞれ $x=-4-t$, $y=t$ とおけることがわかる．それらを $(*)$ の第 1 式 $x-y-z=-1$, すなわち $z=x-y+1$ に代入すると，$z=-3-2t$ を得る．よって，$\boxed{\textbf{25}}$ の答えは ⓐ である．

(2) A の階数が 1 となるのは，B の第 2 行と第 3 行の成分がすべて 0 となる場合であるから，$a=3$ のときであることが直ちにわかる．よって，$\boxed{\textbf{26}}$ の答えは ③ である．このとき，問題文から，方程式 $(*)$ の解 x, y, z のうち，y と z がそれぞれ $y=s$, $z=t$ とおけることがわかる．それらを $(*)$ の第 1 式 $x-y+3z=3$, すなわち $x=3+y-3z$ に代入すると，$x=3+s-3t$ を得る．よって，$\boxed{\textbf{27}}$ の答えは ⓑ である．

問 4　座標平面において，点 P(x, y) を点 Q(u, v) にうつす線形写像 f を

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める．

(1)　直線 $y = x + 2$ 上の点 $(t,\ t+2)$ を f によりうつした点が同じ直線 $y = x + 2$ 上にあるのは，$t =$ $\boxed{\mathbf{28}}$ のときである．

(2)　a, b を定数とする．直線 $y = ax - 2$ が f により直線 $x = b$ にうつされるのは，$a =$ $\boxed{\mathbf{29}}$ のときである．このとき，$b =$ $\boxed{\mathbf{30}}$ である．

$\boxed{\mathbf{28}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{30}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{3}$	⑧ $\dfrac{1}{4}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ $-\dfrac{1}{2}$	ⓕ $-\dfrac{1}{3}$	ⓖ $-\dfrac{1}{4}$	

解説

(1)　点 $(t, t+2)$ を f によりうつした点は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+4 \\ -t+2 \end{pmatrix}$$

より，$(3t+4, -t+2)$ である．この点が直線 $y=x+2$ 上にあるとき，$-t+2=3t+4+2$ を満たすので，$t=-1$ である．したがって，$\boxed{\textbf{28}}$ の答えは ⑨ である．

(2)　直線 $y=ax-2$ 上の点 $(t, at-2)$（t は実数）は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ at-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2a)t-4 \\ (-2+a)t-2 \end{pmatrix}$$

より，f によって点 $((1+2a)t-4, (-2+a)t-2)$ にうつされる．この点の x 座標が t によらず定数 b となるのは，$a=-\dfrac{1}{2}$ のときで，$b=-4$ である．また，このとき y 座標は $-\dfrac{5}{2}t-2$ となり，定数でなく，すべての実数を取り得る．したがって，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x-2$ が f によって 1 点にうつされることはなく，直線 $x=-4$ にうつされる．したがって，$\boxed{\textbf{29}}$，$\boxed{\textbf{30}}$ の答えはそれぞれ ⓔ, ⓒ である．

問 5　行列 $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを考える．

(1)　固有値は $\boxed{\mathbf{31}}$ と $\boxed{\mathbf{32}}$ である．ただし，$\boxed{\mathbf{31}} < \boxed{\mathbf{32}}$ とする．

$\boxed{\mathbf{31}}$ ・ $\boxed{\mathbf{32}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 10	⑦ 15	⑧ 20	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -10	ⓕ -15	ⓖ -20	

(2)　ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\mathbf{33}} \end{pmatrix}$ は 固有値 $\boxed{\mathbf{31}}$ に対する固有ベクトルである．

$\boxed{\mathbf{33}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{1}{3}$	⑧ $\frac{1}{4}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ $-\frac{1}{2}$	ⓕ $-\frac{1}{3}$	ⓖ $-\frac{1}{4}$	

解説

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 3 & 14-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(14-\lambda) - 3 \cdot 3 = (\lambda - 5)(\lambda - 15)$$

であるから，固有値は 5 と 15 である．したがって $\boxed{\textbf{31}}$ の答えは⑤, $\boxed{\textbf{32}}$ の答えは ⑦ である．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$ の固有値 5 に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 6-5 & 3 \\ 3 & 14-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$\omega = -\dfrac{1}{3}$ を得る．したがって $\boxed{\textbf{33}}$ の答えは ⓕ である．

第3分野　常微分方程式

〔問１～問４：解答番号 $\boxed{\textbf{34}}$ ～ $\boxed{\textbf{51}}$〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．

問１　微分方程式

$$(*) \qquad y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

の一般解を求める．

(1)　対応する同次方程式

$$y' - \frac{2}{x^2}y = 0$$

の一般解は，C を任意定数とすると

$$(**) \qquad y = C\,\boxed{\textbf{34}}$$

と表される．

(2)　$(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x) \cdot \boxed{\textbf{34}}$ を $(*)$ に代入すると

$$u' = \boxed{\textbf{35}}$$

が得られる．この方程式の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{\textbf{36}}$$

であるので，$(*)$ の一般解は $y = \boxed{\textbf{36}} \cdot \boxed{\textbf{34}}$ であり，$\displaystyle\lim_{x \to +0} y = \boxed{\textbf{37}}$ を満たす．

$\boxed{\textbf{34}}$ ・ $\boxed{\textbf{35}}$ の解答群

⓪ $e^{-\frac{1}{x}}$	① $e^{-\frac{2}{x}}$	② $e^{-\frac{4}{x}}$	③ $e^{-\frac{1}{2x}}$	④ $e^{-\frac{1}{4x}}$
⑤ $\dfrac{e^{-\frac{2}{x}}}{x}$	⑥ $\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}$	⑦ $\dfrac{e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}$	⑧ $\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x^3}$	⑨ $\dfrac{e^{\frac{4}{x}}}{x^4}$

$\boxed{\mathbf{36}}$ の解答群

⓪ $e^{\frac{1}{4x}}+\tilde{C}$　① $2e^{\frac{2}{x}}+\tilde{C}$　② $3e^{\frac{1}{4x}}+\tilde{C}$

③ $4e^{\frac{4}{x}}+\tilde{C}$　④ $-2e^{\frac{2}{x}}+\tilde{C}$　⑤ $-4e^{-\frac{2}{x}}+\tilde{C}$

⑥ $\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}+\tilde{C}$　⑦ $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2x}}+\tilde{C}$　⑧ $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}+\tilde{C}$

⑨ $-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}}+\tilde{C}$　ⓐ $-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}+\tilde{C}$　ⓑ $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3x}}+\tilde{C}$

($\tilde{C}$ は任意定数)

$\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{1}{3}$

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ $-\frac{1}{2}$　ⓐ $-\frac{1}{3}$

ⓑ ∞　ⓒ $-\infty$

解説

(1) 対応する同次方程式は変数分離形である．

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x^2}$$

と変形して両辺を x で積分すると

$$\log|y| = -\frac{2}{x} + C_1$$

したがって

$$y = \pm e^{c_1} e^{-\frac{2}{x}},$$

ただし C_1 は任意定数である．最後に $C = \pm e^{C_1}$ とおけば，$\boxed{\mathbf{34}}$ の答えは ① となる．

(2) 定数変化法を適用する．(1) より $y = u(x)e^{-\frac{2}{x}}$ とおくと $y' = (u' + \frac{2}{x^2}u)e^{-\frac{2}{x}}$ である．これらを $(*)$ に代入すると $u'e^{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x^2}$ すなわち $u' = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}$ となり，さらに積分すると $u(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}} + \tilde{C}$ （$\tilde{C}$ は任意定数）が得られる．このとき $(*)$ の一般解は $y = -\frac{1}{2} + \tilde{C}e^{-\frac{2}{x}}$ であり $\lim_{x \to +0} y = -\frac{1}{2}$. 以上より，$\boxed{\mathbf{35}}$ ～ $\boxed{\mathbf{37}}$ の答えは順に ⑥, ⓐ, ⑨ となる．

問 2　微分方程式

$$(*) \qquad y' = \frac{xy + 4x^2 + y^2}{x^2}$$

を $x > 0$ の範囲で考える．いま

$$z = \frac{y}{x}$$

とおくと

$$y' = z + xz'$$

である．すると，$(*)$ より関数 $z(x)$ についての微分方程式

$$z' = \frac{\boxed{\mathbf{38}}}{\boxed{\mathbf{39}}}$$

すなわち

$$(**) \qquad \frac{z'}{\boxed{\mathbf{38}}} = \frac{1}{\boxed{\mathbf{39}}}$$

が得られる．ここで

$$\int \frac{dz}{\boxed{\mathbf{38}}} = \boxed{\mathbf{40}}$$

なので，$(**)$ より

$$z(x) = \boxed{\mathbf{41}}$$

を得る．したがって，$(*)$ の一般解は $y = x \cdot \boxed{\mathbf{41}}$ である．

38 の解答群

⓪ $4 + z^2$　① $4 - z^2$　② $4 + z + z^2$
③ $4 + z - z^2$　④ $4 - z + z^2$　⑤ $4 - z + 2z^2$
⑥ $4 + 2z + z^2$　⑦ $4 + 2z - z^2$　⑧ $4 - 2z + z^2$

39 の解答群

⓪ x　① $2x$　② x^2　③ $2x^2$
④ $-x$　⑤ $-2x$　⑥ $-x^2$　⑦ $-2x^2$

$\boxed{\mathbf{40}}$ の解答群

⓪ $\tan^{-1} z + C$　① $\dfrac{1}{2}\tan^{-1} z + C$　② $\dfrac{1}{2}\tan^{-1} 2z + C$

③ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1} \dfrac{z}{2} + C$　④ $-\tan^{-1} z + C$　⑤ $-\tan^{-1} 2z + C$

⑥ $-2\tan^{-1} 2z + C$　⑦ $-\dfrac{1}{2}\tan^{-1} 2z + C$　⑧ $-\dfrac{1}{2}\tan^{-1} \dfrac{z}{2} + C$

(C は任意定数)

$\boxed{\mathbf{41}}$ の解答群

⓪ $\tan(\log x + \tilde{C})$　① $\tan(2\log x + \tilde{C})$

② $2\tan(\log x + \tilde{C})$　③ $2\tan(2\log x + \tilde{C})$

④ $2\tan\left(\dfrac{1}{2}\log x + \tilde{C}\right)$　⑤ $\dfrac{1}{2}\tan(\log x + \tilde{C})$

⑥ $-\tan(2\log x + \tilde{C})$　⑦ $-2\tan(\log x + \tilde{C})$

⑧ $-2\tan(2\log x + \tilde{C})$　⑨ $-2\tan\left(\dfrac{1}{2}\log x + \tilde{C}\right)$

($\tilde{C}$ は任意定数)

解説

$(*)$ は右辺が $\frac{y}{x}$ の関数として表される同次形の微分方程式である．$z=\frac{y}{x}$ と置くと，$y=xz$ したがって $y'=z+xz'$ であり，これらを $(*)$ に代入すれば関数 z についての微分方程式 $z+xz'=z+4+z^2$ すなわち $z'=\dfrac{4+z^2}{x}$ が得られ，さらに変数を分離すると $\dfrac{z'}{4+z^2}=\dfrac{1}{x}$ となる．この式の両辺を x で積分するとそれぞれ

$$\int \frac{z'}{4+z^2}dx=\int \frac{dz}{2^2+z^2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2}+C_1, \qquad \int \frac{dx}{x}=\log x+C_2$$

（C_1, C_2 は任意定数）であるから，$\tan^{-1}\frac{z}{2}=2(\log x+C_2-C_1)$. よって，$\tilde{C}=2(C_2-C_1)$ と置けば $z=2\tan(2\log x+\tilde{C})$ が得られる．以上より，$\boxed{\textbf{38}}$ ～ $\boxed{\textbf{41}}$ の答えは順に ⓪, ⓪, ③, ③ となる．

問 3 微分方程式

$$(*) \qquad y'' - y' - 2y = x^2 + 1$$

の解 $y(x)$ で，初期条件

$$(**) \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

を満たすものを求める．

(1) $(*)$ の特殊解 (特解) で

$$y_0(x) = Ax^2 + Bx + C, \qquad A,\ B,\ C \text{ は定数}$$

の形のものを求めると，$A = \boxed{\mathbf{42}}$, $B = \boxed{\mathbf{43}}$, $C = \boxed{\mathbf{44}}$ である．

$\boxed{\mathbf{42}}$ ～ $\boxed{\mathbf{44}}$ の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{2}$	② $-\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $-\frac{1}{3}$
	⑤ $\frac{2}{3}$	⑥ $-\frac{2}{3}$	⑦ $\frac{1}{4}$	⑧ $-\frac{1}{4}$
	⑨ $\frac{3}{4}$	ⓐ $-\frac{3}{4}$	ⓑ $\frac{5}{4}$	ⓒ $-\frac{5}{4}$

(2) $(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - y' - 2y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{45}}$$

であるから，$(*)$ の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{45}} + y_0(x)$$

である．

$\boxed{\textbf{45}}$ の解答群

⓪ $C_1e^x + C_2e^{-x}$

① $C_1e^x + C_2e^{-2x}$

② $C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$

③ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

④ $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

⑤ $C_1 \cos x + C_2 \sin 2x$

⑥ $C_1 \cos 2x + C_2 \sin x$

⑦ $C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

(C_1, C_2 は任意定数)

(3) (2) で求めた解 $y(x) = \boxed{\textbf{45}} + y_0(x)$ が初期条件 $(**)$ を満たすのは

$$C_1 = \boxed{\textbf{46}}, \quad C_2 = \boxed{\textbf{47}}$$

のときである．これによって，求める解 $y(x)$ が得られる．

$\boxed{\textbf{46}}$ ・ $\boxed{\textbf{47}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{3}{4}$　⑥ $\frac{5}{4}$　⑦ -1　⑧ -2

⑨ $-\frac{1}{2}$　ⓐ $-\frac{1}{4}$　ⓑ $-\frac{3}{4}$　ⓒ $-\frac{5}{4}$

解説

これは 2 階定数係数非同次線形常微分方程式の初期値問題である．

(1) $(*)$ の非同次項（右辺の項）が 2 次多項式なので，その特殊解で 2 次多項式 $y_0 = Ax^2 + Bx + C$ の形のものがあるとしてその係数を求める．$(*)$ の左辺に y_0 を代入すると

$$y_0'' - y_0' - 2y_0 = -2Ax^2 - 2(A+B)x + (2A - B - 2C)$$

なので，$-2A = 1$, $A + B = 0$, $2A - B - 2C = 1$ のとき y_0 は $(*)$ の解である．これを A, B, C について解けば $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{5}{4}$ を得る．以上より，$\boxed{\mathbf{42}}$ ～ $\boxed{\mathbf{44}}$ の答えは順に ②, ①, ⓒ となる．

(2) $(*)$ に対応する同次方程式の一般解を求める．特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$ である．これを解いて $\lambda = 2, -1$．したがって，同次方程式の一般解は $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ (C_1, C_2 は任意定数) となる．以上より，$\boxed{\mathbf{45}}$ の答えは ② となる．

(3) (1), (2) の結果より，$(*)$ の一般解は $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ である．これが初期条件 $(**)$ を満たすように C_1, C_2 を決定すればよい．$y(0) = 1$ より $C_1 + C_2 - \frac{5}{4} = 1$, $y'(0) = -1$ より $2C_1 - C_2 + \frac{1}{2} = -1$ である．これを解けば $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_2 = 2$ を得る．以上より，$\boxed{\mathbf{46}}$, $\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは順に ④ , ② となる．

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad y'' + 4y = \cos kx$$

について考える．ただし，k は正の定数である．

(1)　$(*)$ に対応する同次方程式 $y'' + 4y = 0$ の一般解は $y = \boxed{\textbf{48}}$ である．

$\boxed{\textbf{48}}$ の解答群

⓪ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$　　① $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

② $C_1e^{-2x} + C_2xe^{2x}$　　③ $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

④ $C_1\cos 2x + C_2x\cos 2x$　　⑤ $C_1\cos 2x + C_2x\sin 2x$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2)　$k \neq \boxed{\textbf{49}}$ のとき，$(*)$ の一般解は，定数 A を用いて $y = \boxed{\textbf{48}} + A\cos kx$ と表すことができる．A は k を用いて $A = \boxed{\textbf{50}}$ と表される．

$\boxed{\textbf{49}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ $\sqrt{2}$　⑥ $\sqrt{3}$　⑦ $2\sqrt{2}$

$\boxed{\textbf{50}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{k^2}$　① $-\dfrac{1}{k^2}$　② $\dfrac{1}{1-k^2}$　③ $-\dfrac{1}{1-k^2}$

④ $\dfrac{1}{2-k^2}$　⑤ $-\dfrac{1}{2-k^2}$　⑥ $\dfrac{1}{3-k^2}$　⑦ $-\dfrac{1}{3-k^2}$

⑧ $\dfrac{1}{4-k^2}$　⑨ $-\dfrac{1}{4-k^2}$

(3)　$k=$ $\boxed{\mathbf{49}}$ のとき，$(*)$ の一般解は $y=$ $\boxed{\mathbf{48}}$ $+$ $\boxed{\mathbf{51}}$ である．

$\boxed{\mathbf{51}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{4}xe^{x}$	① $-\dfrac{1}{2}xe^{-x}$	② xe^{-2x}
③ $\dfrac{1}{2}xe^{-2x}$	④ $\dfrac{1}{2}x\cos 2x$	⑤ $\dfrac{1}{2}x\cos\sqrt{2}x$
⑥ $x\sin 2x$	⑦ $2x\sin 2x$	⑧ $\dfrac{1}{4}x\sin 2x$

解説

(1) 同次方程式 $y''+4y=0$ の特性方程式 $\lambda^2+4=0$ を解けば $\lambda=2i,-2i\,(i=\sqrt{-1})$．よって同次方程式の一般解は $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\,(C_1,\,C_2$ は任意定数$)$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは③となる．

(2) $(*)$ の特殊解として $y=A\cos kx\,(A$ は定数$)$ という形のものを求める．この y を $(*)$ の左辺に代入すると $y''+4y=(4-k^2)A\cos kx$．よって $k\neq 2$ のとき $A=\frac{1}{4-k^2}$ とすれば $y=A\cos kx$ は $(*)$ の特殊解である．以上より，$\boxed{\mathbf{49}}$，$\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは順に②, ⑧ となる．

(3) $k=2$ のとき，$(*)$ の特殊解として $y=x(C\cos 2x+D\sin 2x)\,(C,D$ は定数$)$ という形のものを求める．この y を $(*)$ の左辺に代入すると $y''+4y=-4C\sin 2x+4D\cos 2x$．よって $C=0,\ D=\frac{1}{4}$ のとき，$y=\frac{1}{4}x\sin 2x$ は $(*)$ の特殊解である．したがって，$(*)$ の一般解は $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x$．以上より，$\boxed{\mathbf{51}}$ の答えは⑧となる．

第 4 分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{52}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{70}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　(1)　確率変数 X の確率分布が

X の値	0	1	2	4	8
確率	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

（ a は定数 ）

で与えられているとき，$E(X) = \boxed{\mathbf{52}}$ であり，$V(X) = \boxed{\mathbf{53}}$ である．また，$V(-X) = \boxed{\mathbf{54}} \cdot V(X)$ である．

$\boxed{\mathbf{52}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{54}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

⑥ $\frac{7}{2}$　⑦ $-\frac{3}{2}$　⑧ $-\frac{5}{2}$　⑨ $-\frac{7}{2}$　ⓐ -1

(2) 2 つの事象 A, B に対し，事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．$P(A) = \dfrac{1}{4}$，$P(B) = \dfrac{1}{2}$，$P(A \cup B) = \dfrac{5}{8}$ のとき，$P(A|B) = \boxed{\textbf{55}}$ であり，A と B は $\boxed{\textbf{56}}$．

55 の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{3}$	④ $\dfrac{1}{4}$
⑤ $\dfrac{1}{5}$	⑥ $\dfrac{2}{3}$	⑦ $\dfrac{3}{4}$	⑧ $\dfrac{2}{5}$	⑨ $\dfrac{4}{5}$

56 の解答群

⓪ 独立である　　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

解説

(1) 離散型確率変数の期待値の定義から，

$$E(X) = 0 \cdot a + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

を得る．また，

$$E(X^2) = 0^2 \cdot a + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{8} + 8^2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{2}$$

であるから，公式 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を用いると，

$$V(X) = \frac{15}{2} - 2^2 = \frac{7}{2}$$

がわかる．また，定数 c に対して，$V(cX) = c^2 V(X)$ であるから，$c = -1$ として，$V(-X) = (-1)^2 V(X) = V(X)$ となる．以上より，$\boxed{\mathbf{52}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{54}}$ の答えは順に ②, ⑥, ① となる．

(2) 加法定理

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

から，

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$$

である．したがって，条件付き確率の定義から，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

を得る．$P(A) = P(A|B) = \frac{1}{4}$ であるから，A と B は独立であることが分かる．あるいは，$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ が分かった段階で，$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{8}$ に気付けば，A と B は独立であることが分かり，これから逆に，$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{4}$ が求まる．以上より，$\boxed{\mathbf{55}}$, $\boxed{\mathbf{56}}$ の答えは順に ④, ⓪ となる．

問 2 確率変数 X の確率密度関数が，ある定数 c に対して

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(x-2)^2}, & x < 0, \\ 0, & x \geqq 0 \end{cases}$$

で与えられているとき，$c = \boxed{\textbf{57}}$ である．また，分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{\textbf{58}}, & x < 0, \\ \boxed{\textbf{59}}, & x \geqq 0 \end{cases}$$

となる．したがって，$P(|X| \leqq 1) = \boxed{\textbf{60}}$ である．

57 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{1}{4}$

58 ・ **59** の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{x-2}$　③ $\dfrac{-1}{x-2}$

④ $\dfrac{2}{x-2}$　⑤ $\dfrac{-2}{x-2}$　⑥ $\dfrac{4}{(x-2)^3}$　⑦ $\dfrac{-4}{(x-2)^3}$

60 の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{4}$

⑤ $\dfrac{1}{5}$　⑥ $\dfrac{2}{3}$　⑦ $\dfrac{3}{4}$　⑧ $\dfrac{2}{5}$　⑨ $\dfrac{3}{5}$

解説

確率密度関数の定義から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{c}{(x-2)^2}\,dx = \frac{c}{2} = 1$$

であるから，$c = 2$ を得る．分布関数 $F(x)$ は，$x < 0$ のとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{(t-2)^2}\,dt = \frac{-2}{x-2}$$

であり，$x \geqq 0$ のとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = 1$$

が分かる．与えられた確率密度関数 $f(x)$ が，$f(x) = 0,\ x \geqq 0$ であることから，ただちに $F(x) = 1,\ x \geqq 0$ としてもよい．また，

$$P(|X| \leqq 1) = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{-2}{-1-2} = \frac{1}{3}$$

である．以上より，$\boxed{\mathbf{57}}$ ～ $\boxed{\mathbf{60}}$ の答えは順に ②, ⑤, ①, ③ となる．

問 3 (1) 確率変数 X が区間 $[1, e]$ 上の一様分布に従うとき，$P(1 \leqq X \leqq 2) = \boxed{\textbf{61}}$ である．また，$E(X) = \boxed{\textbf{62}}$ であり，$E\left(\dfrac{1}{X}\right) = \boxed{\textbf{63}}$ である．

$\boxed{\textbf{61}}$ ～ $\boxed{\textbf{63}}$ の解答群

⓪ $e+1$	① $\dfrac{e+1}{2}$	② $\dfrac{e+1}{3}$	③ $\dfrac{1}{e-1}$	④ $\dfrac{2}{e-1}$
⑤ $e-1$	⑥ $\dfrac{e-1}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{e+1}$	⑧ $\dfrac{2}{e+1}$	⑨ 1

(2) 確率変数 X, Y が独立で，ともにパラメータ 2 のポアソン分布に従っているとする．すなわち

$$P(X = k) = P(Y = k) = e^{-2}\frac{2^k}{k\,!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

とする．このとき，$P(X = 1, Y = 1) = \boxed{\textbf{64}}$ であり，$P(X + Y = 2) = \boxed{\textbf{65}}$ である．

$\boxed{\textbf{64}}$ ・ $\boxed{\textbf{65}}$ の解答群

⓪ $2e^{-2}$	① $3e^{-2}$	② $4e^{-2}$	③ $5e^{-2}$
④ $6e^{-2}$	⑤ $8e^{-2}$	⑥ $2e^{-4}$	⑦ $3e^{-4}$
⑧ $4e^{-4}$	⑨ $5e^{-4}$	ⓐ $6e^{-4}$	ⓑ $8e^{-4}$

解説

(1) 一般に，確率変数 U が区間 $[a,\, b]$ 上の一様分布に従っているとき，
確率 $P(c \leqq U \leqq d)$, $a \leqq c < d \leqq b$ の値は，全区間 $[a,\, b]$ に対する区間 $[c,\, d]$ の長さの比に等しいことに注意すると，$P(1 \leqq X \leqq 2) = \dfrac{2-1}{e-1} = \dfrac{1}{e-1}$ である．また期待値 $E(X)$ は区間 $[1,\, e]$ の中央の値 $\dfrac{e+1}{2}$ となる．
X の確率密度関数 $f(x)$ が，$f(x) = \frac{1}{e-1}$, $1 \leqq x \leqq e$ であるから

$$E\Big(\frac{1}{X}\Big) = \int_1^e \frac{1}{x} f(x)\, dx = \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{e-1}$$

となる．以上より，$\boxed{\textbf{61}}$ ～ $\boxed{\textbf{63}}$ の答えは順に ③, ①, ③ となる．

(2) 確率変数 X, Y が独立なので

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = e^{-2}\frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2}\frac{2^1}{1!} = 4e^{-4}$$

である．また，

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0)$$

であり，

$$P(X=0, Y=2) = P(X=2, Y=0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 2e^{-4}$$

であるから，$P(X+Y=2) = 8e^{-4}$ を得る．

以上より，$\boxed{\textbf{64}}$, $\boxed{\textbf{65}}$ の答えは順に ⑧, ⓑ となる．

問 1　あるアナログ音響機器製造メーカーで，部品の仕入れ先を変更することになり，この変更による性能の変化を調べることになった．製品の音声出力の歪率（%）は正規分布に従い，変更前の母平均は 0.30 で，母分散は 0.07^2 であった．経験的に歪率の母分散は仕入れ先の変更に影響を受けないことが分かっている．部品の仕入れ先の変更後に製造された 50 台の製品を無作為に選び，これらの歪率を測定したところ，標本平均値は 0.27 であった．

歪率の母平均 μ の変化を調べるために，μ に対する両側検定を有意水準（危険率）5% で行うことにし，$\mu_0 = 0.30$,　$\sigma^2 = 0.07^2$,　$\overline{x} = 0.27$,　$n = 50$ とおき

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$,

対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$

と設定する．選び出した 50 台の製品の歪率をそれぞれ確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ とすると，これらはすべて独立で平均 μ, 分散 0.07^2 の $\boxed{\textbf{66}}$ に従っている．したがって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50}$$

は平均 $\boxed{\textbf{67}}$，分散 $\boxed{\textbf{68}}$ の $\boxed{\textbf{66}}$ に従う．帰無仮説 H_0 のもとでは

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 0.30}{0.07/\sqrt{50}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い，正規分布表から

$$P(-1.96 < Z < 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

がわかる．この式から，$1.96 \times \dfrac{0.07}{\sqrt{50}} \fallingdotseq 0.019$ に注意すると

$$P(|\overline{X} - 0.30| \geqq 0.019) \fallingdotseq \boxed{\textbf{69}}$$

となる．一方，$\overline{x}$ は，

$$|\overline{x} - 0.30| = |0.27 - 0.30| = 0.03 > 0.019$$

を満たすので，H_0 は有意水準（危険率） 5%で $\boxed{\textbf{70}}$．

$\boxed{\textbf{66}}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

$\boxed{\textbf{67}}$ ・ $\boxed{\textbf{68}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\mu}{50}$　① 50μ　② μ　③ 50×0.07

④ 0.07^2　⑤ 50×0.07^2　⑥ $50^2 \times 0.07^2$　⑦ $\dfrac{0.07^2}{50}$　⑧ $\dfrac{0.07^2}{50^2}$

$\boxed{\textbf{69}}$ の解答群

⓪ 0　① 0.05　② 0.1　③ 0.15　④ 0.2　⑤ 0.25

⑥ 0.75　⑦ 0.8　⑧ 0.85　⑨ 0.9　ⓐ 0.95

$\boxed{\textbf{70}}$ の解答群

⓪ 棄却される　① 採択される

解説

一般に，母集団から選ばれた標本は母集団の分布に従うので，題意から $X_1,\, X_2, \ldots, X_n$ はすべて同じ正規分布に従う．また，正規分布 $N(m,\, \sigma^2)$ に従う独立な確率変数 $X_1,\, X_2, \ldots, X_n$ に対し

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \;\sim\; N\big(m, \frac{1}{n}\sigma^2\big)$$

であるから，題意より $\overline{X}$ は $E(\overline{X}) = \mu,\, V(\overline{X}) = \dfrac{0.07^2}{50}$ である正規分布に従う．

一般に，正規分布 $N(m,\, \sigma^2)$ に従っている確率変数 X に対して

$$\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,\, 1)$$

であるから，帰無仮説 H_0 のもとで Z は標準正規分布に従う．したがって，

$$P(|Z| \geqq 1.96) \fallingdotseq P(|\overline{X} - 0.30| \geqq 0.019) \fallingdotseq 0.05$$

と $|\overline{x} - 0.30| = 0.03 > 0.019$ から，H_0 は有意水準 5% で棄却される．以上より，$\boxed{\textbf{66}}$ 〜 $\boxed{\textbf{70}}$ の答えは順に ③, ②, ⑦, ①, ⓪ となる．