EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2020年12月19日（土）

4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．

(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(7) 試験開始40分後から退室を認める．

(8) 問題冊子は持ち帰ること．

(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は $(\boxed{\mathbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．また，自然数 n に対し，$\mathbb{R}^n$ は n 次元実ベクトル空間とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

目次

第 1 分野	微分積分	……	3
第 2 分野	線形代数	……	13
第 3 分野	常微分方程式	……	23
第 4 分野	確率・統計	……	33

第１分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{16}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある． 各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x + \tan^{-1}x - \sqrt{3}$$

とするとき

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \boxed{\mathbf{1}}, \qquad f'\left(\sqrt{3}\right) = \boxed{\mathbf{2}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ **の解答群**

⓪ 0　① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{\pi}{6}$　⑥ $\dfrac{\pi}{3}$　⑦ $\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{2}{3}$　① $\dfrac{3}{2}$　② $\dfrac{4}{5}$　③ $\dfrac{5}{4}$

④ $\dfrac{4}{7}$　⑤ $\dfrac{7}{4}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1$　⑦ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1$

計算用紙

問 2　次の 2 つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-7x^2+15x-9}=\boxed{\mathbf{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\boxed{\mathbf{4}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ ・ $\boxed{\mathbf{4}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 6
	⑤ $\frac{1}{2}$	⑥ $\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{2}{3}$	⑧ $\frac{1}{6}$
	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3	ⓒ -6
	ⓓ $-\frac{1}{2}$	ⓔ $-\frac{1}{3}$	ⓕ $-\frac{2}{3}$	ⓖ $-\frac{1}{6}$

計算用紙

問 3　xyz 空間において，$z = x^y\ (x > 0)$ で与えられる曲面を S とする．S 上の点 $\mathrm{A}(1, 3, 1)$ において，曲面 S に接する平面 T は，方程式

$$z - 1 = \boxed{\mathbf{5}}\,(x-1) + \boxed{\mathbf{6}}\,(y-3)$$

で与えられる．

$\boxed{\mathbf{5}}$・$\boxed{\mathbf{6}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ $\log 3$　⑦ $2\log 3$　⑧ $3\log 3$　⑨ $4\log 3$　ⓐ $5\log 3$

計算用紙

問 4 xy 平面上の 3 点 O$(0,0)$, A$(\pi,0)$, B(π,π) を頂点とする $\triangle$OAB およびその内部を集合 D とするとき，重積分

$$\iint_D x\cos(x+y)\,dxdy$$

の値を求める．

集合 D は

$$D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq \boxed{\mathbf{7}}\ ,\ \ \boxed{\mathbf{8}}\ \leqq y \leqq \boxed{\mathbf{9}}\ \right\}$$

と表されるので

$$\begin{aligned}\iint_D x\cos(x+y)dxdy &= \int_0^{\boxed{7}}\left(\int_{\boxed{8}}^{\boxed{9}} x\cos(x+y)dy\right)dx\\ &= \int_0^{\boxed{7}} \boxed{\mathbf{10}}\ dx = \boxed{\mathbf{11}}\end{aligned}$$

である．

$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{\pi}{2}$	③ $-\dfrac{\pi}{2}$	④ π	⑤ $-\pi$
⑥ x	⑦ $-x$	⑧ y	⑨ $-y$	ⓐ $x+y$	ⓑ $x-y$

$\boxed{10}$ の解答群

⓪ $x+x\cos x$	① $x-x\cos x$
② $x+x\sin x$	③ $x-x\sin x$
④ $x\cos x-x\cos 2x$	⑤ $-x\cos x+x\cos 2x$
⑥ $x\sin x-x\sin 2x$	⑦ $-x\sin x+x\sin 2x$

$\boxed{11}$ の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{2}$	② $-\dfrac{\pi}{2}$	③ π	④ $-\pi$
	⑤ $\dfrac{3}{2}\pi$	⑥ $-\dfrac{3}{2}\pi$	⑦ 2π	⑧ -2π

計算用紙

問 5 極座標 r, θ により

$$r = \frac{1}{1+\cos\theta} \quad (-\pi < \theta < \pi)$$

で表される平面上の曲線を C とする．直交座標に関する C の方程式を求めるために $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおけば，点 $\mathrm{P}(x, y)$ が C 上にあるとき $\boxed{\mathbf{12}}$ が成り立つ．したがって，曲線 C は $\boxed{\mathbf{13}}$ である．また，C の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分の長さ L は

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boxed{\mathbf{14}}\, d\theta$$

と表される．この積分値を求めるために $t = \sin\dfrac{\theta}{2}$ とおき，置換積分を行うと

$$L = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1-t^2)^2}\, dt$$

となる．ここで

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \boxed{\mathbf{15}}$$

であるから，$L = \boxed{\mathbf{16}}$ となる．

$\boxed{12}$・$\boxed{13}$ の解答群

⓪ $4xy = 1$	① $xy = 4$	② $4x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + 4y^2 = 1$	④ $2x - y^2 = 1$	⑤ $2x + y^2 = 1$
⑥ $x^2 - 2y = -1$	⑦ $x^2 + 2y = 1$	⑧ 楕円
⑨ 放物線	ⓐ 双曲線	ⓑ 懸垂線

$\boxed{14}$ の解答群

⓪ $1 + \cos\theta$	① $(1 + \cos\theta)^2$	② $\sqrt{2}(1 + \cos\theta)^2$
③ $\dfrac{1}{1 + \cos\theta}$	④ $\dfrac{1}{(1 + \cos\theta)^2}$	⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{2}(1 + \cos\theta)^2}$
⑥ $\dfrac{\sqrt{2}}{1 + \cos\theta}$	⑦ $\dfrac{\sqrt{2}}{(1 + \cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$	⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{2}(1 + \cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$

$\boxed{\mathbf{15}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

① $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

② $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}+\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{1-t}\right)$

③ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{1+t}\right)$

④ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}+\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1}{1+t}\right)$

⑤ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{1}{1+t}\right)$

$\boxed{\mathbf{16}}$ **の解答群**

⓪ $\sqrt{2}$　　① $\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}-1)$　　② $\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1)$

③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　④ $\sqrt{2}+\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$　　⑤ $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

第２分野　線形代数

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{17}}$ ～ $\boxed{\mathbf{34}}$ 〕

問１ (1) $\mathbb{R}^3$ の原点を O とし，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ をその正規直交基底とする．ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{e}_1 + 2\,\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$$

によって作られる △OAB の面積は $\boxed{\mathbf{17}}$ である．

$\boxed{\mathbf{17}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ 6　⑦ $\dfrac{1}{2}$　⑧ $\dfrac{3}{2}$　⑨ $\dfrac{5}{2}$　ⓐ $\sqrt{2}$　ⓑ $\sqrt{3}$

ⓒ $\sqrt{6}$　ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　ⓔ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ⓕ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{18}}$ である．

$\boxed{\mathbf{18}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -4　ⓒ -5　ⓓ -6　ⓔ -7

(3)　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} の $(1,1)$ 成分は $\boxed{\mathbf{19}}$ であり，

$(3,2)$ 成分は $\boxed{\mathbf{20}}$ である．

$\boxed{\mathbf{19}}$ ・ $\boxed{\mathbf{20}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 6　⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{1}{6}$

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -6　ⓒ $-\dfrac{1}{2}$　ⓓ $-\dfrac{1}{3}$　ⓔ $-\dfrac{1}{6}$

問 2　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし，} a \text{ は定数})$$

について考える．

(1)　AB の行列式 $|AB|$ の値が 0 となるのは $a =$ $\boxed{\textbf{21}}$ のときである．

(2)　B の各列を順に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ とおくと $B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3)$ であり，$AB = (A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ A\boldsymbol{b}_3)$ である．

さて，$a \neq$ $\boxed{\textbf{21}}$ のときは，ベクトル $A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_3$ は $\mathbb{R}^3$ において $\boxed{\textbf{22}}$ ．

一方，$a =$ $\boxed{\textbf{21}}$ のときは

$$A\boldsymbol{b}_1 = c\,A\boldsymbol{b}_2 + A\boldsymbol{b}_3$$

が成り立つ．ここで $c =$ $\boxed{\textbf{23}}$ である．

21 の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

22 の解答群

⓪ 1 次独立（線形独立）である　① 1 次従属（線形従属）である

23 の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{3}$　⑥ $\frac{2}{3}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ $-\frac{1}{2}$　ⓐ $-\frac{3}{2}$　ⓑ $-\frac{1}{3}$　ⓒ $-\frac{2}{3}$

計算用紙

問 3　ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ から得られる行列 $A = \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$ について考える．

ただし ${}^t\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}$ の転置，すなわち ${}^t\boldsymbol{b} = (2 \;\; -2 \;\; 3)$ を表す．

(1)　行列 A の階数（ランク）は $\boxed{\mathbf{24}}$ である．

$\boxed{\mathbf{24}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

(2)　集合 $V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ は $\boxed{\mathbf{25}}$．ただし，$\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^3$ の零ベクトルとする．

(3)　集合 $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \right\}$ は $\boxed{\mathbf{26}}$．

$\boxed{\mathbf{25}}$・$\boxed{\mathbf{26}}$ **の解答群**

⓪ $\mathbb{R}^3$ の 0 次元ベクトル部分空間である

① $\mathbb{R}^3$ の 1 次元ベクトル部分空間である

② $\mathbb{R}^3$ の 2 次元ベクトル部分空間である

③ $\mathbb{R}^3$ の 3 次元ベクトル部分空間である

④ $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間ではない

計算用紙

問 4 $\mathbb{R}^3$ において，1 次独立（線形独立）なベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

について考える．また，$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ とし，$\boldsymbol{x}$ の長さを $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ とする．ただし ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(1) $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ のなす角の大きさは $\boxed{\textbf{27}}$ である．

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|}, \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_2|}$ と定める．また

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \boxed{\textbf{28}} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおき，$\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ と定めると，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となる．

(3) $U = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$ と定めると，U は 3 次正則行列となり，その逆行列は ${}^tU$ に等しいことがわかる．このことから，$U\boldsymbol{a}_1$ と $U\boldsymbol{a}_2$ の内積は $\boxed{\textbf{29}}$ となる．したがって，$U\boldsymbol{a}_1$ と $U\boldsymbol{a}_2$ のなす角の大きさは $\boxed{\textbf{30}}$ である．

$\boxed{\textbf{27}}$ ・ $\boxed{\textbf{30}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑦ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑧ π

$\boxed{\textbf{28}}$ ・ $\boxed{\textbf{29}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

計算用紙

問 5　行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ b & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし，} a, b \text{ は定数})$$

の固有値が 1, 2, 3 であるとする．

(1)　このとき $a = \boxed{\textbf{31}}$, $b = \boxed{\textbf{32}}$ である．

(2)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{33}} \\ 3 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対応する固有ベクトルである．この $\boldsymbol{x}$ に対して

$$(A^2 - 3A)\,\boldsymbol{x} = \boxed{\textbf{34}}\,\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．

$\boxed{\textbf{31}}$ 〜 $\boxed{\textbf{34}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8

⑨ -1　ⓐ -2　ⓑ -3　ⓒ -4　ⓓ -5　ⓔ -6　ⓕ -7　ⓖ -8

計算用紙

第３分野　常微分方程式

〔 問１〜 問５ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{35}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{51}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．また，特殊解は特解ともいう．

問１ 微分方程式

$$(*) \qquad y' + 2y = 6\cos 2x - 2\sin 2x$$

を解く．

(1) 対応する同次方程式

$$y' + 2y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{35}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{35}}$ の解答群

⓪ $x + C$	① $2x + C$	② Ce^{x}	③ Ce^{-x}	④ Cxe^{x}
⑤ Cxe^{-x}	⑥ Ce^{2x}	⑦ Ce^{-2x}	⑧ Cxe^{2x}	⑨ Cxe^{-2x}

(C は任意定数)

(2) $(*)$ の特殊解を

$$y_s(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$$

とおくと

$$a = \boxed{\mathbf{36}}, \quad b = \boxed{\mathbf{37}}$$

である．よって，$(*)$ の一般解は $y(x) = \boxed{\mathbf{35}} + y_s(x)$ である．

$\boxed{36}$ ・ $\boxed{37}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 6
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -6

問 2　微分方程式

$$(*) \qquad y' + \frac{1}{x}y = 2\log x$$

を $x > 0$ の範囲で考える．

(1)　対応する同次方程式

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

の一般解は

$$(**) \qquad y(x) = C\,\boxed{\mathbf{38}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である．

$\boxed{\mathbf{38}}$ **の解答群**

⓪ $\frac{1}{x}$	① $\frac{1}{x^2}$	② $\frac{1}{x^3}$	③ $\frac{1}{x^4}$
④ $x+1$	⑤ x^2+1	⑥ x^3+1	⑦ x^4+1
⑧ e^x	⑨ e^{-x}	ⓐ $e^{\frac{1}{x}}$	ⓑ $e^{-\frac{1}{x}}$
ⓒ $\log x$	ⓓ $-\log x$	ⓔ $2\log x$	ⓕ $-2\log x$

(2)　$(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x) \cdot \boxed{\mathbf{38}}$ を $(*)$ に代入すると

$$\frac{du}{dx} = \boxed{\mathbf{39}}$$

が得られる．この方程式の一般解 $u(x)$ を求めることにより，$(*)$ の一般解

$$y(x) = \boxed{\mathbf{40}}$$

が得られる．

$\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ $\log x$　① $\dfrac{1}{\log(x+1)}$　② $2\log x$

③ $x\log x$　④ $\dfrac{2x}{\log(x+1)}$　⑤ $2x\log x$

⑥ $x\log x + x$　⑦ $x\log x - x$

$\boxed{\mathbf{40}}$ **の解答群**

⓪ $x\log x + \tilde{C}$　① $2x\log x + \tilde{C}$

② $2x\log x - x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$　③ $x\log x - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$

④ $-x\log x + \tilde{C}$　⑤ $-2x\log x + \tilde{C}$

⑥ $-2x\log x + x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$　⑦ $-x\log x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$

($\tilde{C}$ は任意定数)

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 6y' + 10y = f(x)$$

を考える．

(1)　$f(x) = 0$ のとき，$(*)$ の一般解は $y(x) = \boxed{41}$ である．さらに初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ を満たす解は $y(x) = \boxed{42}$ である．

$\boxed{41}$ の解答群

⓪ $x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	① $x^3(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
② $e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	③ $e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
④ $e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$	⑤ $e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$
⑥ $e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	⑦ $e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
⑧ $e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$	⑨ $e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

（$C_1,\ C_2$ は任意定数）

$\boxed{42}$ の解答群

⓪ $e^x \sin 3x$	① $e^x \cos 3x$	② $e^{-x} \sin 3x$	③ $e^{-x} \cos 3x$
④ $e^{3x} \sin x$	⑤ $e^{3x} \cos x$	⑥ $e^{-3x} \sin x$	⑦ $e^{-3x} \cos x$
⑧ $2e^x \sin 3x$	⑨ $2e^x \cos 3x$	ⓐ $2e^{-x} \sin 3x$	ⓑ $2e^{-x} \cos 3x$
ⓒ $2e^{3x} \sin x$	ⓓ $2e^{3x} \cos x$	ⓔ $2e^{-3x} \sin x$	ⓕ $2e^{-3x} \cos x$

(2) $f(x) = 10x^2 + 28x - 2$ のとき，定数 A, B, C を $A = \boxed{\mathbf{43}}$, $B = \boxed{\mathbf{44}}$, $C = \boxed{\mathbf{45}}$ と定めると

$$y(x) = \boxed{\mathbf{41}} + Ax^2 + Bx + C$$

は，$(*)$ の一般解になる．

$\boxed{43}$ 〜 $\boxed{45}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
	⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4
	⑨ $\frac{1}{3}$	ⓐ $\frac{2}{3}$	ⓑ $\frac{4}{3}$	ⓒ $\frac{5}{3}$
	ⓓ $-\frac{1}{3}$	ⓔ $-\frac{2}{3}$	ⓕ $-\frac{4}{3}$	ⓖ $-\frac{5}{3}$

問 4　初期値問題

$$y'' + 4y' + by = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

の解 y について考える．ただし，b は定数である．

(1)　$b = \boxed{\mathbf{46}}$ のとき，$y = 2e^{-x} - 2e^{-3x}$ である．

(2)　$b = \boxed{\mathbf{47}}$ のとき，$y = 4xe^{-2x}$ である．

(3)　$b = \boxed{\mathbf{48}}$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$ である．

$\boxed{\mathbf{46}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{48}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

計算用紙

問 5　$y(x)$，$z(x)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = y + kz \\ z' = 4y \end{cases}$$

を初期条件 $y(0) = -1$，$z(0) = 6$ のもとで考える．ただし，k は定数とする．

(1)　$(*)$ の 2 つの方程式から z を消去し，y に関する単独の 2 階微分方程式を導くと

$$(**) \qquad y'' - y' - 12y = 0$$

となるのは $k =$ **49** のときである．$(**)$ に対する初期条件は，$y(0) = -1$，$y'(0) =$ **50** となる．

49 の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

50 の解答群

⓪ 10	① 11	② 17	③ 18
④ 24	⑤ 25	⑥ 31	⑦ 32

(2)　初期条件 $y(0) = -1$，$y'(0) =$ **50** を満たす方程式 $(**)$ の解は，$y(x) =$ **51** である．

51 の解答群

⓪ $e^{4x} - 2e^{-3x}$	① $2e^{4x} - 3e^{-3x}$	② $3e^{4x} - 4e^{-3x}$
③ $4e^{4x} - 5e^{-3x}$	④ $e^{3x} - 2e^{-4x}$	⑤ $2e^{3x} - 3e^{-4x}$
⑥ $3e^{3x} - 4e^{-4x}$	⑦ $4e^{3x} - 5e^{-4x}$	

計算用紙

第4分野　確率・統計

〔問1〜問4：解答番号 $\boxed{\textbf{52}}$ 〜 $\boxed{\textbf{70}}$ 〕

(注意)　事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$，$V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問1　(1)　確率変数 X の確率分布が

X の値	-1	0	3	5
確率	a	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

(a は定数)

で与えられている．このとき，$a=$ $\boxed{\textbf{52}}$ であり，$E(X)=$ $\boxed{\textbf{53}}$ である．また，$E(X^2)=$ $\boxed{\textbf{54}}$ であるから，$V(X)=$ $\boxed{\textbf{55}}$ である．

$\boxed{\textbf{52}}$ 〜 $\boxed{\textbf{55}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② -1　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $-\dfrac{1}{2}$

⑤ $\dfrac{3}{2}$　⑥ $-\dfrac{3}{2}$　⑦ $\dfrac{1}{3}$　⑧ $-\dfrac{1}{3}$　⑨ $\dfrac{1}{5}$

ⓐ $\dfrac{1}{10}$　ⓑ $\dfrac{3}{10}$　ⓒ $\dfrac{51}{10}$　ⓓ $\dfrac{69}{10}$　ⓔ $\dfrac{1}{20}$

ⓕ $\dfrac{9}{20}$　ⓖ $\dfrac{69}{20}$　ⓗ $\dfrac{93}{20}$

(2) 2つの事象 A, B に対し，事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A\,|\,B)$ で表す．$P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$, $P(A\,|\,B) = \dfrac{1}{3}$ とすると，$P(A \cap B) = \boxed{\mathbf{56}}$ であり，A と B は $\boxed{\mathbf{57}}$．

$\boxed{56}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{2}{3}$　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{6}$

⑥ $\dfrac{1}{9}$　⑦ $\dfrac{2}{9}$　⑧ $\dfrac{1}{12}$　⑨ $\dfrac{7}{12}$　ⓐ $\dfrac{1}{24}$

$\boxed{57}$ の解答群

⓪ 独立である　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

問 2　2つの確率変数 X, Y は独立で，ともにパラメータ λ をもつポアソン分布に従っているとする．すなわち

$$P(X = k) = P(Y = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

とする．このとき，$P(X = 1, Y = 1) =$ **58** である．また，$P(X \geqq 1) =$ **59** であるから，$P(X \geqq 1, Y = 0) = \dfrac{1}{4}$ となるのは $\lambda =$ **60** のときである．

58 ・ **59** **の解答群**

⓪ 0	① 1	② $e^{-\lambda}$	③ $1 - e^{-\lambda}$
④ $\lambda e^{-\lambda}$	⑤ $1 - \lambda e^{-\lambda}$	⑥ $\lambda^2 e^{-\lambda}$	⑦ $1 - \lambda^2 e^{-\lambda}$
⑧ $e^{-2\lambda}$	⑨ $1 - e^{-2\lambda}$	ⓐ $\lambda e^{-2\lambda}$	ⓑ $1 - \lambda e^{-2\lambda}$
ⓒ $\lambda^2 e^{-2\lambda}$	ⓓ $1 - \lambda^2 e^{-2\lambda}$		

60 **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4	④ $\dfrac{1}{2}$
⑤ $\dfrac{1}{4}$	⑥ $\sqrt{2}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑧ e	⑨ $\dfrac{e}{2}$
ⓐ e^2	ⓑ $\log 2$	ⓒ $\dfrac{1}{2}\log 2$	ⓓ $2\log 2$	

計算用紙

問 3　確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (0 \leqq x < 2)\\[2mm] \dfrac{1}{3} & (2 \leqq x < 4)\\[2mm] 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

で与えられている.

(1)　$P(1 \leqq X \leqq 3)=$ $\boxed{\mathbf{61}}$ である. また $E(X)=$ $\boxed{\mathbf{62}}$, $V(X)=$ $\boxed{\mathbf{63}}$ である.

$\boxed{61}$ 〜 $\boxed{63}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ $\dfrac{1}{2}$	⑤ $\dfrac{3}{2}$
⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{2}{3}$	⑧ $\dfrac{5}{3}$	⑨ $\dfrac{7}{3}$	ⓐ $\dfrac{14}{3}$	ⓑ $\dfrac{20}{3}$
ⓒ $\dfrac{1}{6}$	ⓓ $\dfrac{7}{6}$	ⓔ $\dfrac{1}{9}$	ⓕ $\dfrac{11}{9}$	ⓖ $\dfrac{20}{9}$	ⓗ $\dfrac{28}{9}$

(2)　X の分布関数を $F(x)=P\left(X \leqq x\right)$ とすると

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \boxed{\mathbf{64}} & (0 \leqq x < 2)\\ \boxed{\mathbf{65}} & (2 \leqq x < 4)\\ 1 & (4 \leqq x)\end{cases}$$

である.

$\boxed{64}$ ・ $\boxed{65}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{3}x$	③ $\dfrac{1}{6}x$
④ $\dfrac{1}{8}x$	⑤ x	⑥ $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$
⑧ $\dfrac{1}{3}x+1$	⑨ $\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{3}$	ⓐ $\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3}$	ⓑ $\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{6}$
ⓒ $\dfrac{1}{3}x^2$	ⓓ $\dfrac{1}{6}x^2$	ⓔ $\dfrac{1}{12}x^2$	

計算用紙

問 4　A 農園では，毎年ある品種のみかんを生産し，一定の時期に出荷を行なっている．今年収穫したみかん 1 個あたりの重さの平均を μ g とする．いま，無作為に何個かを標本として取り出し，それぞれの重さを測定することにより，μ の値を信頼度 95% で区間推定する．また，信頼区間の幅を 2 g 以下にするために必要な標本の個数の最小値を求める．なお，これまでの経験から，みかん 1 個あたりの重さの分布は，正規分布に従い，その標準偏差は 5 g であることがわかっている．

まず，標本の個数を n とし，それぞれの重さを表す確率変数を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とすると，これらは互いに独立であり，いずれも正規分布 $N(\mu, 5^2)$ に従う．よって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

は正規分布 $N\left(\boxed{\mathbf{66}}, \boxed{\mathbf{67}}\right)$ に従う．そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\mathbf{68}}}$$

とおけば，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表から

$$P(Z \geqq 1.96) \fallingdotseq 0.025$$

であることがわかり

$$P\left(\overline{X} - \boxed{\mathbf{69}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \boxed{\mathbf{69}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

を得る．これは，信頼度 95% の信頼区間の幅が $2 \times \boxed{\mathbf{69}}$ であることを意味する．したがって，その幅を 2 以下にする個数 n の最小値は $\boxed{\mathbf{70}}$ である．

$\boxed{\mathbf{66}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② μ　③ 2μ　④ $n\mu$

⑤ $\dfrac{\mu}{n}$　⑥ μ^2　⑦ $2\mu^2$　⑧ $n\mu^2$　⑨ $\dfrac{\mu^2}{n}$

$\boxed{67}$ ・ $\boxed{68}$ の解答群

⓪ 5	① $5n$	② $5n^2$	③ $5\sqrt{n}$	④ $\dfrac{5}{n}$
⑤ $\dfrac{5}{n^2}$	⑥ $\dfrac{5}{\sqrt{n}}$	⑦ 5^2	⑧ $5^2 n$	⑨ $5^2 n^2$
ⓐ $\dfrac{5^2}{n}$	ⓑ $\dfrac{5^2}{n^2}$	ⓒ $\sqrt{5}$	ⓓ $\sqrt{5}n$	ⓔ $\dfrac{\sqrt{5}}{n}$

$\boxed{69}$ の解答群

⓪ 0.025	① 0.05	② 1.96	③ 9.8	④ 19.6
⑤ $\dfrac{1.96}{n}$	⑥ $\dfrac{9.8}{n}$	⑦ $\dfrac{19.6}{n}$	⑧ $\dfrac{1.96}{\sqrt{n}}$	⑨ $\dfrac{9.8}{\sqrt{n}}$
ⓐ $\dfrac{19.6}{\sqrt{n}}$	ⓑ $1.96 \times n$	ⓒ $9.8 \times n$	ⓓ $19.6 \times n$	

$\boxed{70}$ の解答群

⓪ 5	① 6	② 10	③ 12	④ 20	⑤ 24
⑥ 25	⑦ 50	⑧ 64	⑨ 65	ⓐ 96	ⓑ 97
ⓒ 100	ⓓ 195	ⓔ 196	ⓕ 256	ⓖ 384	ⓗ 385