

EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2015年12月12日(土)

4分野受験 午後1時30分 ~ 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 ~ 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 ~ 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 ~ 午後2時10分

* 受験分野は、各大学の指示に従ってください。

受験上の注意

- (1) 机の右上に学生証を提示すること。
- (2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
- (3) 開始の合図の後、表紙裏の解答上の注意を読むこと。
- (4) 問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- (5) マークにはHBまたはBの鉛筆(またはシャープペンシル)を使用すること。
- (6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること。
- (7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離さないこと。
- (8) 試験開始40分後から退室を認める。
- (9) 問題冊子は持ち帰ること。
- (10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること。
- (11) その他、監督者の指示に従うこと。

解答上の注意

- (1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び、その記号を解答用紙にマークすること。ただし、解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には \textcircled{i} をマークすること。例えば、 $\boxed{23}$ と表示してある問いに対して解答記号 \textcircled{c} を選ぶ場合は、次のようにマークすること。

23	$\textcircled{0}$	$\textcircled{1}$	$\textcircled{2}$	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	$\textcircled{6}$	$\textcircled{7}$	$\textcircled{8}$	$\textcircled{9}$	\textcircled{a}	\textcircled{b}	\textcircled{d}	\textcircled{e}	\textcircled{f}	\textcircled{g}	\textcircled{h}	\textcircled{i}
----	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

- (2) 破線で囲まれた番号は、前に現れた番号であることを表す。したがって、例えば $\boxed{23}$ には $\boxed{23}$ と同じ解答が入る。
- (3) 解答が数式の場合、 $\boxed{23}$ は ($\boxed{23}$) という意味である。したがって、例えば $\boxed{23}$ の解答が $-x - 1$ の場合、 $x^2 - \boxed{23}$ は $x^2 - (-x - 1)$ を意味する。
- (4) \mathbb{R} は実数全体の集合とする。
- (5) $\log x$ は x の自然対数とする。

目次

第1分野	微分積分	3
第2分野	線形代数	13
第3分野	常微分方程式	23
第4分野	確率・統計	33

第1分野 微分積分

[問 1 ~ 問 5 : 解答番号 ~]

(注意) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は, それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある. 各逆関数がかかる値の範囲(値域)は, $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ とする.

問 1 (1) 次の2つの極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{x} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\tan^{-1} x - \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \boxed{2}$$

・ の解答群

- | | | | | | |
|-------------|------|------|------------------|----------|--------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ $\frac{1}{2}$ | ⑤ π | ⑥ $\frac{\pi}{2}$ |
| ⑦ ∞ | ⑧ -1 | ⑨ -2 | ⑩ $-\frac{1}{2}$ | Ⓐ $-\pi$ | Ⓑ $-\frac{\pi}{2}$ |
| Ⓒ $-\infty$ | | | | | |

(2) 関数 $(1-x)e^x$ のマクローリン展開 ($x=0$ を中心とするテイラー展開) を

$$(1-x)e^x = 1 + ax + bx^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

とするとき, $a = \boxed{3}$, $b = \boxed{4}$ である.

$\boxed{3}$ · $\boxed{4}$ の解答群

- | | | | | | |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 | ⑥ $\frac{1}{2}$ |
| ⑦ $\frac{1}{3}$ | ⑧ $\frac{2}{3}$ | ⑨ $\frac{1}{4}$ | ⑩ -1 | ⑪ -2 | ⑫ -3 |
| ⑬ -4 | ⑭ $-\frac{1}{2}$ | ⑮ $-\frac{1}{3}$ | ⑯ $-\frac{2}{3}$ | ⑰ $-\frac{1}{4}$ | |

問 2 xy 平面において，方程式

$$(*) \quad \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{4} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

が表す曲線 C を考える．

- (1) 曲線 C は点 $P \left(\frac{\pi}{6}, \boxed{5} \right)$ を通る．
- (2) y を x の関数とみなし，導関数 $\frac{dy}{dx}$ を y' で表すとき， $\frac{d}{dx} \sin^2 y = \boxed{6}$ である．
- (3) 方程式 $(*)$ の両辺を x で微分し，(2) の結果を用い，さらに $(x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \boxed{5} \right)$ を代入すると，点 P における曲線 C の接線の傾き $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \boxed{7}$ を得る．

5 の解答群

- ① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$ ⑥ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ⑦ $\frac{\pi}{3}$ ⑧ $\frac{\pi}{4}$ ⑨ $\frac{\pi}{6}$ ⑩ $\frac{\pi}{8}$ ⑪ $\frac{\pi}{12}$ ⑫ $\frac{\pi}{24}$

6 の解答群

- ① $\sin^2 y'$ ② $\cos^2 y'$ ③ $2y' \sin y$
- ④ $2y' \cos y$ ⑤ $y' \sin^2 y$ ⑥ $y' \cos^2 y$
- ⑦ $2y' \sin y \cos y$ ⑧ $2y' \sin^{-1} y$ ⑨ $2y' \cos^{-1} y$

7 の解答群

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$
- ⑥ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑦ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⑧ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑨ -1 ⑩ -2
- ⑪ $-\sqrt{3}$ ⑫ $-\frac{1}{2}$ ⑬ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑭ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⑮ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

計算用紙

問 3 広義積分 $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ の値を求める.

(1) $0 < a < \frac{1}{2}$ を満たす a に対して

$$J(a) = \int_a^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$$

とおく. このとき, $t = x - 1$ とおくことにより,

$$J(a) = \boxed{8} - \sin^{-1} \boxed{9}$$

を得る.

8 の解答群

- | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| ① 0 | ② π | ③ $\frac{\pi}{2}$ | ④ $\frac{3\pi}{2}$ | ⑤ $\frac{\pi}{3}$ |
| ⑥ $\frac{5\pi}{3}$ | ⑦ $\frac{\pi}{4}$ | ⑧ $\frac{7\pi}{4}$ | ⑨ $\frac{\pi}{6}$ | ⑩ $\frac{11\pi}{6}$ |
| ⑪ $-\pi$ | ⑫ $-\frac{\pi}{2}$ | ⑬ $-\frac{\pi}{3}$ | ⑭ $-\frac{\pi}{4}$ | ⑮ $-\frac{\pi}{6}$ |

9 の解答群

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| ① a | ② $2a$ | ③ $a + 1$ | ④ $a + 2$ |
| ⑤ $a - 1$ | ⑥ $a - 2$ | ⑦ $1 - a$ | ⑧ $2 - a$ |
| ⑨ $2(a + 1)$ | ⑩ $2(a - 1)$ | ⑪ $2(1 - a)$ | ⑫ $a(2 - a)$ |

(2) (1)の結果を用いると, $I = \lim_{a \rightarrow +0} J(a) = \boxed{10}$ が導かれる.

10 の解答群

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| ① 0 | ② π | ③ $\frac{\pi}{2}$ | ④ $\frac{\pi}{3}$ | ⑤ $\frac{7\pi}{3}$ |
| ⑥ $\frac{\pi}{4}$ | ⑦ $\frac{9\pi}{4}$ | ⑧ $\frac{\pi}{6}$ | ⑨ $\frac{13\pi}{6}$ | ⑩ $-\frac{\pi}{2}$ |
| Ⓐ $-\frac{\pi}{3}$ | Ⓑ $-\frac{2\pi}{3}$ | Ⓒ $-\frac{\pi}{4}$ | Ⓓ $-\frac{3\pi}{4}$ | Ⓔ $-\frac{\pi}{6}$ |
| Ⓕ $-\frac{5\pi}{6}$ | Ⓖ ∞ | Ⓗ $-\infty$ | | |

問 4 xyz 空間において,

$$z = 5x^3 + 4x^2y - 6xy^2 + y^3$$

で与えられる曲面 S を考える.

(1) 点 $A(1, 2, \boxed{11})$ は曲面 S 上の点である.

(2) 点 A において, 曲面 S に接する平面 T は, 方程式

$$z - \boxed{11} = \boxed{12}(x - 1) + \boxed{13}(y - 2)$$

で与えられる.

(3) 接平面 T 上において, 点 A と異なる点 $Q(x, y, z)$ をとると,

$$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - \boxed{11} \end{pmatrix}$$

は接平面 T に平行なベクトルである. 一方, ベクトル

$$\begin{pmatrix} \boxed{12} \\ \boxed{13} \\ \boxed{14} \end{pmatrix}$$

は \overrightarrow{AQ} と直交するので, 接平面 T の法線ベクトルである.

$\boxed{11} \sim \boxed{14}$ の解答群

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 | ⑥ 5 |
| ⑦ 6 | ⑧ 7 | ⑨ 8 | ⑩ -1 | Ⓐ -2 | Ⓑ -3 |
| Ⓒ -4 | Ⓓ -5 | Ⓔ -6 | Ⓕ -7 | Ⓖ -8 | |

計算用紙

問 5 累次積分 $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy$ の値を求める .

集合 D を

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1 \right\}$$

とすると, それは

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \boxed{15} \leq y \leq \boxed{16} \right\}$$

とも表される . このことより

$$I = \iint_D e^{-x^2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\boxed{15}}^{\boxed{16}} e^{-x^2} dy \right) dx = \boxed{17}$$

を得る .

$\boxed{15} \cdot \boxed{16}$ の解答群

- | | | | | | |
|--------------|--------------|-------|-----------------|--------------|-----------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ e | ④ $\frac{1}{e}$ | ⑤ x | ⑥ $\frac{1}{x}$ |
| ⑦ \sqrt{x} | ⑧ e^{-x^2} | ⑨ y | ⑩ $\frac{1}{y}$ | ⑪ \sqrt{y} | ⑫ e^{-y^2} |

$\boxed{17}$ の解答群

- | | | |
|--|--|--|
| ① 0 | ② 1 | ③ $e - 1$ |
| ④ $1 - e$ | ⑤ $e^2 - 1$ | ⑥ $1 - e^2$ |
| ⑦ $\frac{1}{e} - 1$ | ⑧ $1 - \frac{1}{e}$ | ⑨ $\frac{1}{e^2} - 1$ |
| ⑩ $1 - \frac{1}{e^2}$ | ⑪ $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$ | ⑫ $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$ |
| ⑬ $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right)$ | ⑭ $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$ | |

計算用紙

第2分野 線形代数

[問 1 ~ 問 5 : 解答番号 ~]

(注意) 行列 A に対し, $\text{rank } A$ は A の階数 (ランク) を表す. また, 1 次独立, 1 次従属はそれぞれ線形独立, 線形従属ともいう.

問 1 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) 行列式 $|A|$ の値は である.

(2) 行列式 $|A|$ を第 2 行に関して余因子展開すると,

$$|A| = \text{\input{text}19} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

となる.

・ の解答群

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 | ⑥ 5 |
| ⑦ 6 | ⑧ 7 | ⑨ 8 | ⑩ -1 | ㉑ -2 | ㉒ -3 |
| ㉓ -4 | ㉔ -5 | ㉕ -6 | ㉖ -7 | ㉗ -8 | |

計算用紙

問 2 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し, $a = \boxed{20}$, $b = \boxed{21}$ であるとき, $(AB)^{-1} = C$ が成り立つ.

$\boxed{20} \cdot \boxed{21}$ の解答群

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 | ⑥ 5 |
| ⑦ 6 | ⑧ 7 | ⑨ 8 | ⑩ -1 | Ⓐ -2 | Ⓑ -3 |
| Ⓒ -4 | Ⓓ -5 | Ⓔ -6 | Ⓕ -7 | Ⓖ -8 | |

計算用紙

問 3 3次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^3 において, 3つのベクトル x, y, z を考える.

(1) θ を定数とし,

$$x = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると, ベクトルの組 $\{x, y, z\}$ は **22** .

(2) p, q, r を正の定数とし,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{q}{p} \\ \frac{r}{p} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \frac{p}{q} \\ 1 \\ \frac{r}{q} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \frac{p}{r} \\ \frac{q}{r} \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると, ベクトルの組 $\{x, y, z\}$ は **23** . このとき, $\{x, y, z\}$ が張る \mathbb{R}^3 の部分空間の次元は **24** である.

22 ・ **23** の解答群

- ① 1次独立であり, どの2つのベクトルも互いに直交する
- ② 1次独立であり, どの2つのベクトルも互いに直交しない
- ③ 1次従属であり, どの2つのベクトルも互いに直交する
- ④ 1次従属であり, どの2つのベクトルも互いに直交しない

24 の解答群

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4
- ⑥ 6
- ⑦ 9

計算用紙

問 4 a を定数とし,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}$$

とする. また, A に第 4 列として \mathbf{b} を追加した行列を

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & a \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) $a \neq \boxed{25}$ のとき, $\text{rank } A < \text{rank } B = \boxed{26}$ であり, 方程式 $Ax = \mathbf{b}$ の解 x は存在しない.

(2) $a = \boxed{25}$ のとき, $\text{rank } A = \text{rank } B = \boxed{27}$ であり, 方程式 $Ax = \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boxed{28} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{29} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

と表される無数の解をもつ.

$\boxed{25} \sim \boxed{29}$ の解答群

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 | ⑥ 5 |
| ⑦ 6 | ⑧ 7 | ⑨ 8 | ⑩ -1 | ⑪ -2 | ⑫ -3 |
| ⑬ -4 | ⑭ -5 | ⑮ -6 | ⑯ -7 | ⑰ -8 | |

計算用紙

問 5 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値のうち 1 つは 2 であり、残りの 2 つは $\boxed{30}$ と $\boxed{31}$ である。ただし、 $\boxed{30} < 2 < \boxed{31}$ とする。

$\boxed{30} \cdot \boxed{31}$ の解答群

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5
 ⑦ -1 ⑧ -2 ⑨ -3 ⑩ -4 ⑪ -5

- (2) ベクトル $\begin{pmatrix} \boxed{32} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対する固有ベクトルであり、

ベクトル $\begin{pmatrix} \boxed{33} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 $\boxed{31}$ に対する固有ベクトルである。

$\boxed{32} \cdot \boxed{33}$ の解答群

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ $\frac{1}{2}$
 ⑥ $\frac{3}{2}$ ⑦ $\frac{1}{3}$ ⑧ $\frac{2}{3}$ ⑨ -1 ⑩ -2
 ⑪ -3 ⑫ $-\frac{1}{2}$ ⑬ $-\frac{3}{2}$ ⑭ $-\frac{1}{3}$ ⑮ $-\frac{2}{3}$

計算用紙

第3分野 常微分方程式

[問 1 ~ 問 5 : 解答番号 34 ~ 50]

(注意) 各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を表す. また, 特殊解は特解ともいう.

問 1 微分方程式

$$y' = \frac{1}{y^2}$$

の一般解は, 任意定数 C を用いて $y =$ 34 $と表される. また, $y(0) = -2$ となるように C を定めるとき, $y(x) = 1$ を満たすのは $x =$ 35 $である.$$

34 の解答群

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|
| ① C | ② $\sqrt[3]{x} + C$ | ③ $\sqrt[3]{x+C}$ | ④ $3x + C$ |
| ⑤ $\sqrt[3]{3x} + C$ | ⑥ $\sqrt[3]{3x+C}$ | ⑦ $y^2 + C$ | ⑧ $\frac{y^3}{3} + C$ |
| ⑨ $-\frac{1}{y} + C$ | ⑩ $\frac{x}{y^2} + C$ | | |

35 の解答群

- | | | | | |
|--------|--------|--------|---------|---------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 8 |
| ⑥ 9 | ⑦ 16 | ⑧ 27 | ⑨ -1 | ⑩ -2 |
| ⑪ a -3 | ⑫ b -8 | ⑬ c -9 | ⑭ d -16 | ⑮ e -27 |

計算用紙

問 2 次の微分方程式 (i), (ii), (iii) を $x > 0$ の範囲で考える .

$$(i) \quad y' = xy$$

$$(ii) \quad y' = \frac{y}{x}$$

$$(iii) \quad y' = -\frac{y}{x}$$

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$ である特殊解 y をもつ方程式は , すべて挙げると , 36 である .
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = \infty$ である特殊解 y をもつ方程式は , すべて挙げると , 37 である .
- (3) $y > 0$ であり , $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 0$ である特殊解 y をもつ方程式は , すべて挙げると , 38 である .

36 ~ 38 の解答群

① (i), (ii), (iii)

② (i), (ii)

③ (i), (iii)

④ (ii), (iii)

⑤ (i)

⑥ (ii)

⑦ (iii)

計算用紙

問 3 a を正の定数とし、微分方程式

$$y'' + ay = 0$$

の解 y のうち、定数解 $y = 0$ 以外を考える。

(1) $y(0) = 0$ を満たす解は、0 でない任意の定数 C を用いて $y =$ 39 と表される。

(2) $a =$ 40 のとき、(1) の解は $y(1) = 0$ を満たす。

39 の解答群

- | | | |
|-------------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| ① $C(e^{ax} - e^{-ax})$ | ④ $C(e^{\sqrt{a}x} - e^{-\sqrt{a}x})$ | ⑦ Cxe^{ax} |
| ② $Cxe^{\sqrt{a}x}$ | ⑤ $C \cos ax$ | ⑧ $C \cos \sqrt{a}x$ |
| ③ $Cx \cos ax$ | ⑥ $Cx \cos \sqrt{a}x$ | ⑨ $C \sin ax$ |
| ④ $C \sin \sqrt{a}x$ | ⑩ $Cx \sin ax$ | ⑪ $Cx \sin \sqrt{a}x$ |

40 の解答群

- | | | |
|----------|--------------|-----------------------------|
| ① n | ② n^2 | ③ \sqrt{n} |
| ④ $n\pi$ | ⑤ $(n\pi)^2$ | ⑥ $\sqrt{n\pi}$ (n は自然数) |

計算用紙

問 4 微分方程式

$$(*) \quad y'' - y' - 2y = 40 \sin 2x$$

の解 y のうち，初期条件

$$(**) \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

を満たすものを求める．

- (1) $(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - y' - 2y = 0$$

の一般解は，任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$y = C_1 e^{\boxed{41}x} + C_2 e^{\boxed{42}x} \quad (\text{ただし } \boxed{41} < \boxed{42})$$

と表される．

- (2) $(*)$ の特殊解のうち，定数 A, B を用いて

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x$$

と表されるものを求めると， $A = \boxed{43}$ ， $B = \boxed{44}$ となる．

- (3) $(*)$ の一般解は

$$y = C_1 e^{\boxed{41}x} + C_2 e^{\boxed{42}x} + \boxed{43} \cos 2x + \boxed{44} \sin 2x$$

であるから，初期条件 $(**)$ を満たすように C_1, C_2 を定めると

$$C_1 = \boxed{45}, \quad C_2 = \boxed{46}$$

となる．

$\boxed{41} \sim \boxed{46}$ の解答群

- | | | | | | |
|------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 | ⑥ 5 |
| ⑦ 6 | ⑧ $\frac{1}{2}$ | ⑨ $\frac{3}{2}$ | ⑩ -1 | Ⓐ -2 | Ⓑ -3 |
| Ⓒ -4 | Ⓓ -5 | Ⓔ -6 | Ⓕ $-\frac{1}{2}$ | Ⓖ $-\frac{3}{2}$ | |

計算用紙

問 5 物体を真上に投げたとき，その物体の時刻 t における速度 $v(t)$ が微分方程式

$$(*) \quad \frac{dv}{dt} = -kv - g \quad (k, g \text{ は正の定数})$$

を満たす場合を考える．ただし，物体の運動は直線的で，上昇時に $v(t)$ は正の値をとり，下降時に $v(t)$ は負の値をとるものとする．

(1) 微分方程式 (*) の一般解は，任意定数 C を用いて

$$v(t) = C e^{\boxed{47}t} + \boxed{48}$$

と表される．

$\boxed{47} \cdot \boxed{48}$ の解答群

- | | | | | |
|--------|--------|---------|------------------|------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ -1 | ⑤ -2 |
| ⑥ k | ⑦ g | ⑧ kg | ⑨ $\frac{k}{g}$ | ⑩ $\frac{g}{k}$ |
| ⑪ $-k$ | ⑫ $-g$ | ⑬ $-kg$ | ⑭ $-\frac{k}{g}$ | ⑮ $-\frac{g}{k}$ |

(2) V_0 を正の定数とするととき， $v(0) = V_0$ を満たす微分方程式 (*) の解は

$$v(t) = \boxed{49} e^{\boxed{47}t} + \boxed{48}$$

である．

$\boxed{49}$ の解答群

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ① V_0 | ② $-V_0$ | ③ $V_0 + k$ | ④ $V_0 - k$ |
| ⑤ $V_0 + g$ | ⑥ $V_0 - g$ | ⑦ $V_0 + kg$ | ⑧ $V_0 - kg$ |
| ⑨ $V_0 + \frac{k}{g}$ | ⑩ $V_0 - \frac{k}{g}$ | ⑪ $V_0 + \frac{g}{k}$ | ⑫ $V_0 - \frac{g}{k}$ |

- (3) (2) で求めた解 $v(t)$ の符号が正から負に変わる時刻 T は, $v(T) = 0$ から導かれ, $T = \boxed{50}$ である.

50 の解答群

① $\frac{1}{k} \log \frac{kV_0}{g}$

② $\frac{1}{k} \log \frac{V_0 + kg}{kg}$

③ $\frac{1}{k} \log \frac{V_0 - kg}{kg}$

④ $\frac{1}{k} \log \frac{kg}{V_0 + kg}$

⑤ $\frac{1}{k} \log \frac{kg}{V_0 - kg}$

⑥ $\frac{1}{k} \log \frac{kV_0 + g}{g}$

⑦ $\frac{1}{k} \log \frac{kV_0 - g}{g}$

⑧ $\frac{1}{k} \log \frac{g}{kV_0 + g}$

⑨ $\frac{1}{k} \log \frac{g}{kV_0 - g}$

第4分野 確率・統計

〔 問 1 ~ 問 5 : 解答番号 51 ~ 70 〕

(注意) 事象 A に対し, $P(A)$ は A の起こる確率を表す. また, 確率変数 X に対し, $E(X), V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均, 平均値), 分散を表す.

問 1 確率変数 X の確率分布が

X の値	2	4	6	8
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	a

(a は定数)

で与えられている. このとき, $a = \text{51}$ であり, $E(X) = \text{52}$ である. また, $E(X^2) = \text{53}$ であるから, $V(X)$ は $\text{53} - \text{52}^2$ に等しい.

51 ~ 53 の解答群

- | | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 | ⑥ 5 |
| ⑦ 30 | ⑧ $\frac{1}{2}$ | ⑨ $\frac{1}{3}$ | ⑩ $\frac{1}{4}$ | ⑪ $\frac{1}{5}$ | ⑫ $\frac{8}{3}$ |
| ⑬ $\frac{13}{3}$ | ⑭ $\frac{16}{3}$ | ⑮ $\frac{19}{3}$ | ⑯ $\frac{92}{3}$ | ⑰ $\frac{98}{3}$ | ⑱ $\frac{104}{3}$ |

計算用紙

問 2 ある工場では、同じ型の部品が a, b, c の 3 社から 5 : 3 : 2 の割合で納入されている。a 社が自社の部品を調査したところ、不良品の割合は 1% であった。同様に、b 社では 2%, c 社では 2.5% であった。

工場に納入された全部品の中から無作為に取り出した 1 個が a, b, c 社からのものである事象をそれぞれ A, B, C とする。また、その取り出した 1 個が不良品である事象を F とする。

- (1) $P(A) = \boxed{54}$, $P(A \cap F) = \boxed{55}$ である。
- (2) (1) と同様に $P(B \cap F), P(C \cap F)$ を求めることにより, $P(F) = \boxed{56}$ を得る。
- (3) 取り出した部品 1 個が不良品であったとき, それが a 社から納入されたものである確率, すなわち事象 F が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率 $P(A|F)$ の値は $\boxed{57}$ である。

$\boxed{54} \sim \boxed{57}$ の解答群

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| ① 0 | ② $\frac{1}{2}$ | ③ $\frac{3}{8}$ | ④ $\frac{5}{8}$ | ⑤ $\frac{2}{11}$ |
| ⑥ $\frac{5}{16}$ | ⑦ $\frac{1}{20}$ | ⑧ $\frac{4}{25}$ | ⑨ $\frac{1}{55}$ | ⑩ $\frac{1}{100}$ |
| ⑪ $\frac{2}{125}$ | ⑫ $\frac{1}{200}$ | ⑬ $\frac{11}{200}$ | ⑭ $\frac{1}{2000}$ | ⑮ $\frac{3}{2000}$ |

計算用紙

問 3 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が定数 k を用いて

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と表されるとする。このとき、 $k = \boxed{58}$ であり、 $P\left(|X| \leq \frac{1}{2}\right) = \boxed{59}$ である。

また、 $E(X) = \boxed{60}$ 、 $V(X) = \boxed{61}$ である。

$\boxed{58}$ ~ $\boxed{61}$ の解答群

- | | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ $\frac{1}{2}$ | ⑥ $\frac{3}{2}$ |
| ⑦ $\frac{5}{2}$ | ⑧ $\frac{1}{3}$ | ⑨ $\frac{2}{3}$ | ⑩ $\frac{4}{3}$ | Ⓐ $\frac{5}{3}$ | Ⓑ $\frac{1}{5}$ |
| Ⓒ $\frac{2}{5}$ | Ⓓ $\frac{3}{5}$ | Ⓔ $\frac{4}{5}$ | Ⓕ $\frac{1}{8}$ | Ⓖ $\frac{3}{8}$ | Ⓗ $\frac{5}{8}$ |

計算用紙

問 4 コインを 1 回投げたとき，表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるものとする．そのコインを 10 回投げ，各回において表が出たら 2 点，裏が出たら -1 点の点数を与える．また，表が出る回数を X ，点数の合計を Y とおく．

(1) X は二項分布 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ に従い， $E(X) = \boxed{62}$ ， $V(X) = \boxed{63}$ である．

62 ・ **63** の解答群

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 |
| ⑥ 5 | ⑦ 6 | ⑧ 7 | ⑨ 8 | ⑩ 9 |
| Ⓐ $\frac{1}{2}$ | Ⓑ $\frac{3}{2}$ | Ⓒ $\frac{5}{2}$ | Ⓓ $\frac{7}{2}$ | Ⓔ $\frac{9}{2}$ |

(2) Y を X の式で表すと $Y = \boxed{64}$ となるので， $E(Y) = \boxed{65}$ ， $V(Y) = \boxed{66}$ である．

64 の解答群

- | | | | |
|-------------|-------------|---------|------------|
| ① $X + 10$ | ② $X - 10$ | ③ $2X$ | ④ $2X - 1$ |
| ⑤ $2X + 10$ | ⑥ $2X - 10$ | ⑦ $3X$ | ⑧ $3X - 1$ |
| ⑨ $3X + 10$ | ⑩ $3X - 10$ | Ⓐ X^2 | Ⓑ $10 - X$ |

65 ・ **66** の解答群

- | | | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 5 | ⑤ 10 | ⑥ 15 |
| ⑦ $\frac{1}{2}$ | ⑧ $\frac{5}{2}$ | ⑨ $\frac{15}{2}$ | ⑩ $\frac{25}{2}$ | Ⓐ $\frac{45}{2}$ | Ⓑ $\frac{75}{2}$ |
| Ⓒ $\frac{1}{4}$ | Ⓓ $\frac{5}{4}$ | Ⓔ $\frac{15}{4}$ | Ⓕ $\frac{25}{4}$ | Ⓖ $\frac{45}{4}$ | Ⓗ $\frac{75}{4}$ |

計算用紙

問 5 ある工場で生産される薬剤 1 個あたりの質量の分布は、平均 μ mg, 標準偏差 σ mg の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い、これまでの経験から標準偏差は $\sigma = 50$ と仮定してよいことがわかっている。いま、生産された薬剤から無作為に何個かを標本として取り出し、それぞれの質量を測定することにより、 μ の値を信頼度 95% で区間推定する。そして、信頼区間の幅を 35 mg 以下にするために必要な標本の個数の最小値を求める。

まず、標本の個数を n とし、それぞれの質量を表す確率変数を X_1, X_2, \dots, X_n とすると、これらは互いに独立であり、いずれも正規分布 $N(\mu, 50^2)$ に従う。よって、標本平均

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

は正規分布 $N(\boxed{67}, \boxed{68})$ に従うので、

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\boxed{69}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。正規分布表から

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \doteq 0.95$$

であることがわかり、

$$P\left(\bar{X} - 1.96 \times \boxed{69} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \times \boxed{69}\right) \doteq 0.95$$

を得る。これは、信頼度 95% の信頼区間の幅が $2 \times 1.96 \times \boxed{69}$ であることを意味する。したがって、その幅を 35 以下にする個数 n の最小値は $\boxed{70}$ である。

$\boxed{67}$ の解答群

- | | | | | |
|-------------------|-----------|------------|------------|---------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ μ | ④ 2μ | ⑤ $n\mu$ |
| ⑥ $\frac{\mu}{n}$ | ⑦ μ^2 | ⑧ $2\mu^2$ | ⑨ $n\mu^2$ | ⑩ $\frac{\mu^2}{n}$ |

68 ・ 69 の解答群

- | | | | | |
|--------------------|-------------------------|---------------|----------------|-------------------------|
| ㉑ 50 | ㉒ $50n$ | ㉓ $50n^2$ | ㉔ $50\sqrt{n}$ | ㉕ $\frac{50}{n}$ |
| ㉖ $\frac{50}{n^2}$ | ㉗ $\frac{50}{\sqrt{n}}$ | ㉘ 50^2 | ㉙ 50^2n | ㉚ 50^2n^2 |
| ㉛ $\frac{50^2}{n}$ | ㉜ $\frac{50^2}{n^2}$ | ㉝ $\sqrt{50}$ | ㉞ $\sqrt{50}n$ | ㉟ $\frac{\sqrt{50}}{n}$ |

70 の解答群

- | | | | | | |
|------|------|------|-------|-------|-------|
| ㉑ 3 | ㉒ 5 | ㉓ 6 | ㉔ 15 | ㉕ 16 | ㉖ 17 |
| ㉗ 25 | ㉘ 32 | ㉙ 33 | ㉚ 35 | ㉛ 36 | ㉜ 50 |
| ㉝ 68 | ㉞ 83 | ㉟ 85 | ㊱ 100 | ㊲ 256 | ㊳ 280 |