EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2013年12月14日（土）
4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．

(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(8) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(9) 問題冊子は持ち帰ること．

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．

(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\mathbf{23}}$ は ($\boxed{\mathbf{23}}$) という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合， $x^2-\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 6 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{18}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x = \boxed{\mathbf{1}}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} x \cos \frac{\pi}{x} = \boxed{\mathbf{2}}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 5	④ -1	⑤ -2	⑥ -5
⑦ π	⑧ $\dfrac{\pi}{2}$	⑨ $-\pi$	ⓐ $-\dfrac{\pi}{2}$	ⓑ ∞	ⓒ $-\infty$	

計算用紙

問 2　関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $\sin x$ のマクローリン展開（$x=0$ を中心とするテイラー展開）は

$$\frac{1}{1-x} \quad = \quad 1+x+x^2+x^3+\cdots \qquad (\,|x|<1\,)\ ,$$

$$\sin x \quad = \quad \boxed{\mathbf{3}}$$

である．したがって，$\dfrac{\sin x}{1-x}$ のマクローリン展開を

$$\frac{\sin x}{1-x} \quad = \quad c_0+c_1\,x+c_2\,x^2+c_3\,x^3+\cdots \qquad (\,|x|<1\,)$$

とおくと $c_0=$ $\boxed{\mathbf{4}}$，$c_1=1$，$c_2=1$，$c_3=$ $\boxed{\mathbf{5}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群

⓪ $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

① $x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

② $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

③ $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

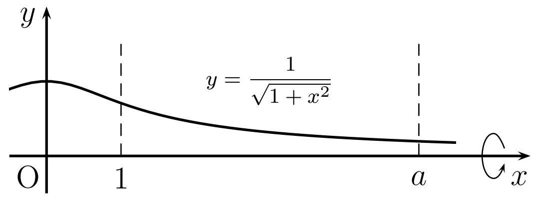
$\boxed{\mathbf{4}}$・$\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ $\dfrac{2}{3}$　⑥ $\dfrac{4}{3}$

⑦ $\dfrac{2}{5}$　⑧ $\dfrac{4}{5}$　⑨ $\dfrac{7}{5}$　ⓐ $\dfrac{1}{6}$　ⓑ $\dfrac{5}{6}$　ⓒ $\dfrac{7}{6}$

計算用紙

問 3 定数 a は $a>1$ を満たすとする．曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，直線 $x=1$, $x=a$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V(a)$ は $V(a)=\boxed{\mathbf{6}}$ であり，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)=\boxed{\mathbf{7}}$ である．



$\boxed{\mathbf{6}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{1+a^2}-1$	① $\log(1+a^2)$	② $\sin^{-1}\dfrac{1}{a}$
③ $\sin^{-1}\dfrac{1}{a}-\dfrac{\pi}{2}$	④ $\tan^{-1}a$	⑤ $\tan^{-1}a-\dfrac{\pi}{4}$
⑥ $\pi\left(\dfrac{1}{1+a^2}-1\right)$	⑦ $\pi\log(1+a^2)$	⑧ $\pi\sin^{-1}\dfrac{1}{a}$
⑨ $\pi\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{a}-\dfrac{\pi}{2}\right)$	ⓐ $\pi\tan^{-1}a$	ⓑ $\pi\left(\tan^{-1}a-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{\mathbf{7}}$ **の解答群**

⓪ 0	① $\dfrac{1}{3}$	② $\dfrac{1}{2}$	③ 1	④ 2	⑤ 3
⑥ $\dfrac{\pi}{4}$	⑦ $\dfrac{\pi}{3}$	⑧ $\dfrac{\pi}{2}$	⑨ π	ⓐ 2π	ⓑ 3π
ⓒ $\dfrac{\pi^2}{4}$	ⓓ $\dfrac{\pi^2}{3}$	ⓔ $\dfrac{\pi^2}{2}$	ⓕ π^2	ⓖ $2\pi^2$	ⓗ $3\pi^2$

計算用紙

問 4 媒介変数表示で表される曲線 $x = \cos^3 t,\ y = 3\sin t - \sin^3 t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ の全長を L とおく.

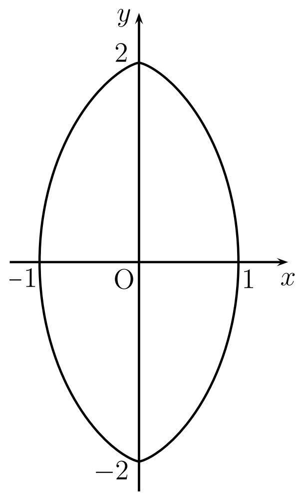
このとき,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \boxed{\ \mathbf{8}\ }\,dt$$

$$= \boxed{\ \mathbf{9}\ }$$

である.



$\boxed{8}$ の解答群

⓪ $3\cos^4 t$　① $3\cos^3 t$　② $3\cos^2 t$　③ $3\cos t$

④ $9\cos^4 t$　⑤ $9\cos^3 t$　⑥ $9\cos^2 t$　⑦ $9\cos t$

$\boxed{9}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ π　⑧ 2π　⑨ 3π　ⓐ 4π　ⓑ 5π　ⓒ 6π

計算用紙

問 5 変数 $x,\ y$ の関数 $f(x,\ y)$ が

$$f(x,\ y) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 y + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 - 2y$$

で定義されているとする．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) = 0$ の解 $(x,\ y)$ をすべてあげると $(-2,\ -2)$, $\boxed{\mathbf{10}}$ である．これらが $f(x,\ y)$ の極値を与える点 $(x,\ y)$ の候補である．

(2) 点 $(-2,\ -2)$ については，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,\ -2) = \boxed{\mathbf{11}} < 0$ であり，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,\ -2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,\ -2) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2,\ -2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,\ -2) \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{12}} > 0$$

であるから，関数 $f(x,\ y)$ は点 $(-2,\ -2)$ で $\boxed{\mathbf{13}}$ ．

$\boxed{10}$ の解答群

⓪ $(0,\ 0)$　① $(1,\ 1)$　② $(-2,\ -3)$
③ $(0,\ -1)$，$(0,\ 2)$　④ $(0,\ -1)$，$(0,\ 0)$　⑤ $(-2,\ -3)$，$(0,\ 2)$

$\boxed{11}$・$\boxed{12}$ の解答群

⓪ -5　① -4　② -3　③ -2　④ -1
⑤ 1　⑥ 2　⑦ 3　⑧ 4　⑨ 5

$\boxed{13}$ の解答群

⓪ 極大値をとる　① 極小値をとる　② 極値をとらない

計算用紙

問 6　xy 平面上の 3 点 $(0,0)$, (π,π), $(\pi,-\pi)$ を頂点とする三角形およびその内部を集合 D とするとき，重積分

$$\iint_D x\sin(x-y)\,dxdy$$

の値を求める．

集合 D は

$$D=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;0\leqq x\leqq \boxed{\mathbf{14}},\ \ \boxed{\mathbf{15}}\leqq y\leqq \boxed{\mathbf{16}}\,\right\}$$

と表されるので，

$$\begin{aligned}\iint_D x\sin(x-y)\,dxdy &= \int_0^{\boxed{\mathbf{14}}}\left(\int_{\boxed{\mathbf{15}}}^{\boxed{\mathbf{16}}} x\sin(x-y)\,dy\right)dx\\ &= \int_0^{\boxed{\mathbf{14}}} \boxed{\mathbf{17}}\ dx \ = \ \boxed{\mathbf{18}}\end{aligned}$$

である．

$\boxed{\mathbf{14}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{16}}$ の解答群

⓪ $-\pi$　① $-\dfrac{\pi}{2}$　② 0　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ π

⑤ $x-y$　⑥ $x+y$　⑦ $-x$　⑧ x

$\boxed{\mathbf{17}}$ の解答群

⓪ $x-x\cos x$　① $x+x\cos x$　② $x-x\sin x$

③ $x+x\sin x$　④ $x-x\cos 2x$　⑤ $-x+x\cos 2x$

⑥ $x-x\sin 2x$　⑦ $-x+x\sin 2x$

$\boxed{\mathbf{18}}$ の解答群

⓪ $-\pi^2$　① $-\dfrac{\pi^2}{2}$　② $-\pi$　③ $-\dfrac{\pi}{2}$　④ 0

⑤ $\dfrac{\pi}{2}$　⑥ π　⑦ $\dfrac{\pi^2}{2}$　⑧ π^2

計算用紙

第２分野　線形代数

〔 問１〜 問５ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{19}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{36}}$ 〕

問１　(1)　ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に直交する単位ベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{19}} \\ \boxed{\mathbf{20}} \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

$\boxed{\mathbf{19}}$ ・ $\boxed{\mathbf{20}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5
⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8

(2)　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{21}}$ である.

$\boxed{\mathbf{21}}$ の解答群

⓪ -6　① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4
⑥ 6　⑦ 8

計算用紙

問 2　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1)　A の逆行列 A^{-1} は $\boxed{\mathbf{22}}$ である.

$\boxed{\mathbf{22}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2)　$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B は $\boxed{\mathbf{23}}$ である.

$\boxed{\mathbf{23}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

計算用紙

問 3　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} \ \ x + 2y + 2z = 1 & \cdots\ (\text{第 1 式}) \\ 2x + 5y + 3z = b & \cdots\ (\text{第 2 式}) \\ \ \ x + \ \ y + az = 1 & \cdots\ (\text{第 3 式}) \end{cases}$$

について考える．ここで a, b は実数とし，方程式 $(*)$ の係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数（ランク）は 2 であるとする．

(1)　a の値は $\boxed{\textbf{24}}$ である．

(2)　方程式 $(*)$ が解をもつのは $b = \boxed{\textbf{25}}$ のときである．

(3)　A の階数が 2 であるから，$(*)$ が解をもつとき，ある 2 つの式から残りの 1 つの式が導かれる．例えば，第 1 式の $\boxed{\textbf{26}}$ 倍と第 2 式の $\boxed{\textbf{27}}$ 倍を加えると第 3 式を得る．

$\boxed{24}$ ～ $\boxed{27}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

計算用紙

問 4　3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし}, a\ \text{は定数})$$

について考える.

(1)　AB の行列式 $|AB|$ の値が 0 となるのは $a =$ **28** のときである.

(2)　B の各列を順に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ とおくと $B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3)$ であり, $AB = (A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ A\boldsymbol{b}_3)$ と表せる.

さて, $a \neq$ **28** のとき, ベクトル $A\boldsymbol{b}_1$, $A\boldsymbol{b}_2$, $A\boldsymbol{b}_3$ は 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において **29** . 一方, $a =$ **28** のときは,

$$A\boldsymbol{b}_1 = c\,A\boldsymbol{b}_2 + d\,A\boldsymbol{b}_3$$

が成り立つ. ここで $c =$ **30** , $d =$ **31** である.

28 **の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

29 **の解答群**

⓪ 1次独立（線形独立）である　① 1次従属（線形従属）である

30 ・ **31** **の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{3}$　⑥ $\frac{2}{3}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ $-\frac{1}{2}$　ⓐ $-\frac{3}{2}$　ⓑ $-\frac{1}{3}$　ⓒ $-\frac{2}{3}$

計算用紙

問 5　2 次方程式 $9x^2-4xy+6y^2=10$ は，対称行列

$$A=\begin{pmatrix} 9 & \boxed{\mathbf{32}} \\ \boxed{\mathbf{32}} & 6 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 9 & \boxed{\mathbf{32}} \\ \boxed{\mathbf{32}} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=10$$

と表すことができる．A の固有値は $\lambda_1=\boxed{\mathbf{33}}$, $\lambda_2=10$ であり，それぞれに対応する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\mathbf{34}} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{35}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる．これらを $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, $\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$ のように大きさ 1 に正規化し，第 1 列，第 2 列とする行列を $T=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} & \dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ とおく．変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

により方程式　$9x^2-4xy+6y^2=10$　は　$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=10$　となる．方程式 $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=10$ の表す図形は $\boxed{\mathbf{36}}$ である．

$\boxed{32}$ 〜 $\boxed{35}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ −1　⑧ −2　⑨ −3　ⓐ −4　ⓑ −5　ⓒ −6

$\boxed{36}$ の解答群

⓪ 楕円　① 放物線　② 双曲線

計算用紙

第３分野　常微分方程式

〔 問１～問４ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{37}}$ ～ $\boxed{\mathbf{50}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．また，特殊解は特解ともいう．

問１ 微分方程式

$$(*) \quad y' - \frac{2}{x}y = x^3$$

の一般解を求める．

(1) 対応する同次方程式

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

の一般解は，C を任意定数とすると

$$(**) \quad y = C \; \boxed{\mathbf{37}}$$

と表される．

(2) $(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x) \cdot \boxed{\mathbf{37}}$ を $(*)$ に代入すると，

$$\frac{du}{dx} = \boxed{\mathbf{38}}$$

が得られる．この方程式の一般解を求めると，

$$u(x) = \boxed{\mathbf{39}}$$

であるので，$(*)$ の一般解は $y = \boxed{\mathbf{37}} \cdot \boxed{\mathbf{39}}$ である．

$\boxed{\mathbf{37}}$ ・ $\boxed{\mathbf{38}}$ の解答群

⓪ x　① x^2　② $\log x$　③ $x \log x$　④ $\dfrac{1}{x}$　⑤ $\dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{2}{x}+\tilde{C}$ ① $\dfrac{x^2}{2}+\tilde{C}$ ② $\log x+\tilde{C}$ ③ $x\log x+\tilde{C}$

④ $2x+\tilde{C}x^2$ ⑤ $\dfrac{x^4}{2}+\tilde{C}x^2$ ⑥ $\dfrac{\log x}{x}+\dfrac{\tilde{C}}{x}$ ⑦ $x\log x+\tilde{C}x$

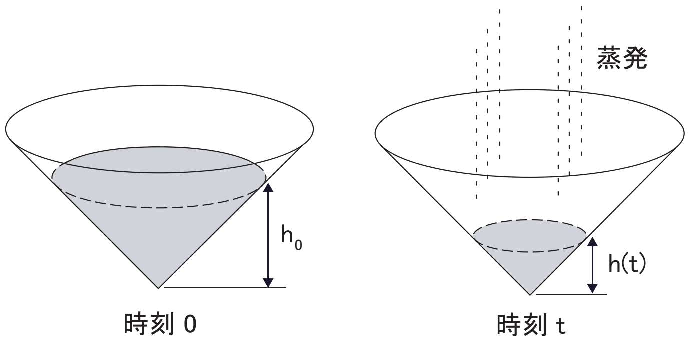
⑧ $\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{\tilde{C}}{x}$ ⑨ $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\tilde{C}}{x}$ ⓐ $\dfrac{\log x}{x^2}+\dfrac{\tilde{C}}{x^2}$

($\tilde{C}$ は任意定数)

問 2　下の左図のように，円錐を逆さにした形状の容器に揮発性の液体が底の頂点から高さ h_0 $(h_0 > 0)$ まで満たされている．時刻 $t = 0$ で容器上面のふたが外れて液体の気化による液面低下が始まる．液面の高さ $h(t)$ は，容器が設置された実験室の室温の時間周期変動を考慮して，微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dh}{dt} = -(1 - \sin t)\, h^2$$

に従い減少していくものとする．



(1)　初期条件 $h(0) = h_0$ のもとで微分方程式 $(*)$ の解 $h(t)$ を求めると，$h(t) = \boxed{\mathbf{40}}$ であり，$h(t) > 0$ であることがわかる．

$\boxed{\mathbf{40}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{h_0}{(\sqrt{h_0}\,t + 1 - \sqrt{h_0} + \sqrt{h_0}\cos t)^2}$　① $\dfrac{h_0}{(\,t + 1 - \sin t)^2}$

② $\dfrac{h_0}{1 - h_0 + h_0 t + h_0 \cos t}$　③ $\dfrac{h_0}{1 + h_0 + h_0 t - h_0 \cos t}$

④ $\dfrac{h_0^2 + t + \sin t}{h_0}$　⑤ $\dfrac{h_0^2 - 1 + t + \cos t}{h_0}$

(2) 方程式 $(*)$ より $\dfrac{dh}{dt}=0$ となる n 番目の時刻 T_n は，$T_n=$ $\boxed{\textbf{41}}$

$(n=1,2,3,\ldots)$ であり，$h(T_n)=$ $\boxed{\textbf{42}}$ となる．

$\boxed{\textbf{41}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{n\pi}{2}$　① $\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\pi$　② $n\pi$

③ $\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$　④ $(2n-1)\pi$　⑤ $\left(2n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$

⑥ $\left(2n-\dfrac{3}{2}\right)\pi$

$\boxed{\textbf{42}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{h_0}{(\sqrt{h_0}\,T_n+1-\sqrt{h_0})^2}$　① $\dfrac{h_0}{T_n^2}$

② $\dfrac{h_0}{1-h_0+h_0\,T_n}$　③ $\dfrac{h_0}{1+h_0+h_0\,T_n}$

④ $\dfrac{h_0^2+T_n+1}{h_0}$　⑤ $\dfrac{h_0^2+T_n-1}{h_0}$

問 3 次の 5 つの微分方程式を考える.

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & y'' - 2y' + 3y = 0 \\
\text{(ii)} & y'' - 5y' + 6y = 0 \\
\text{(iii)} & y'' + 2y' - 6y = 0 \\
\text{(iv)} & y'' - 4y' + 4y = 0 \\
\text{(v)} & y'' - 7y' + 12y = 0
\end{array}
$$

このうち e^{3x} を解としてもつ方程式をすべてあげると $\boxed{\mathbf{43}}$ であり, $e^x \cos\sqrt{2}x$ を解としてもつ方程式をすべてあげると $\boxed{\mathbf{44}}$ である.
また, xe^{ax} (a は定数) の形の解をもつ方程式は 1 つのみで $\boxed{\mathbf{45}}$ である. このとき $a =$ $\boxed{\mathbf{46}}$ であり, 一般解は $\boxed{\mathbf{47}}$ である.

$\boxed{\mathbf{43}}$ ～ $\boxed{\mathbf{45}}$ の解答群

⓪ (i)　① (ii)　② (iii)　③ (iv)　④ (v)

⑤ (i), (ii)　⑥ (ii), (iii)　⑦ (ii), (v)

⑧ (iii), (iv)　⑨ (iii), (v)　ⓐ (iv), (v)

ⓑ (i), (ii), (iii)　ⓒ (i), (iii), (v)

ⓓ (ii), (iii), (iv)　ⓔ (ii), (iii), (v)

$\boxed{\mathbf{46}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

$\boxed{\mathbf{47}}$ の解答群

⓪ $(A + Bx)e^{-x}$　① $(Ax + Bx^2)e^{-x}$　② $(A + Bx)e^{x}$

③ $(Ax + Bx^2)e^{x}$　④ $(A + Bx)e^{2x}$　⑤ $(Ax + Bx^2)e^{2x}$

(A, B は任意定数)

計算用紙

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 2y' + y = e^{3x}$$

の一般解を求める．関数 $z(x)$ に対して，$L(z)$ を

$$L(z) = \frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx} + z$$

で定義すると，$(*)$ は

$$L(y) = e^{3x}$$

と表すことができる．ここで，任意の定数 α について

$$L(e^{\alpha x}) = P(\alpha)e^{\alpha x}$$

が成り立つのは，$P(\alpha) = \boxed{\mathbf{48}}$ のときである．$P(3) = \boxed{\mathbf{49}} \neq 0$ であるから

$$L\left(\frac{1}{P(3)}e^{3x}\right) = e^{3x}$$

となる．したがって $\dfrac{1}{P(3)}e^{3x}$ は $(*)$ の特殊解である．ゆえに $(*)$ の一般解は

$$y = \frac{1}{P(3)}e^{3x} + \boxed{\mathbf{50}}$$

である．

48 の解答群

⓪ 0

① α　② $-\alpha$　③ $\alpha - 2$

④ $-2\alpha + 1$　⑤ $\alpha^2 + 2\alpha + 1$　⑥ $-\alpha^2 + 2\alpha + 1$

⑦ $\alpha^2 - 2\alpha + 1$　⑧ $\alpha^2 + 2\alpha - 1$　⑨ $\alpha^2 - 2\alpha - 1$

49 の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

$\boxed{50}$ の解答群

⓪ $(A+Bx)e^{-x}$ ① $(A+Bx)e^{x}$ ② $Ae^{x}+Be^{2x}$

③ $Ae^{-x}+Be^{2x}$ ④ $Ae^{x}+Be^{-2x}$ ⑤ $Ae^{-x}+Be^{-2x}$

$(A, B$ は任意定数$)$

第4分野　確率・統計

〔問1～問5：解答番号 $\boxed{51}$ ～ $\boxed{67}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ X の期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問1 (1) 1 から 6 の各目が等確率で出るさいころを 2 回投げる．このとき出る目の最大値を X とすると，X が 4 となる確率 $P(X=4)$ は $\boxed{51}$ である．

$\boxed{51}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{36}$	① $\frac{5}{36}$	② $\frac{7}{36}$	③ $\frac{11}{36}$	④ $\frac{13}{36}$
⑤ $\frac{1}{18}$	⑥ $\frac{5}{18}$	⑦ $\frac{7}{18}$	⑧ $\frac{11}{18}$	⑨ $\frac{13}{18}$
ⓐ $\frac{1}{12}$	ⓑ $\frac{5}{12}$	ⓒ $\frac{7}{12}$	ⓓ $\frac{1}{9}$	ⓔ $\frac{5}{9}$

(2) X と Y が独立な確率変数で，それぞれの期待値が $E(X)=2$, $E(Y)=3$ のとき $E(2X+3XY-4Y+2)=$ $\boxed{52}$ である．さらに，X^2 の期待値が $E(X^2)=9$ で，Y の分散が $V(Y)=3$ ならば，$V(X+Y)=$ $\boxed{53}$ である．

$\boxed{52}$・$\boxed{53}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9
ⓐ 10	ⓑ 11	ⓒ 12	ⓓ 13	ⓔ 14

計算用紙

問 2　2 つの事象 A, B に対して,

$$P(A)=\frac{1}{3},\quad P(B)=c,\quad P(A\cup B)=\frac{7}{9}\qquad (c\text{ は定数})$$

とする.

(1)　このとき, $P(A\cap B)=$ $\boxed{\mathbf{54}}$ である. したがって, 事象 A と事象 B が独立になるのは $c=$ $\boxed{\mathbf{55}}$ のときである.

(2)　事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す. $c=\dfrac{5}{9}$ であるとき $P(A|B)=$ $\boxed{\mathbf{56}}$ である.

54 の解答群

⓪ $\dfrac{1}{3}-c$　① $\dfrac{4}{9}-c$　② $c-\dfrac{4}{9}$　③ $c+\dfrac{1}{3}$

55 の解答群

⓪ $\dfrac{1}{6}$　① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{2}{5}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ 1

56 の解答群

⓪ $\dfrac{1}{16}$　① $\dfrac{1}{9}$　② $\dfrac{1}{8}$　③ $\dfrac{1}{6}$　④ $\dfrac{1}{5}$

⑤ $\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{1}{2}$　⑦ $\dfrac{2}{5}$　⑧ $\dfrac{2}{3}$　⑨ $\dfrac{3}{4}$

計算用紙

問 3　ある工場において，製品が 1 日 N 個生産されている．1 日に出る不良品の個数を X_N とすると，X_N は平均 2 の二項分布 $B\left(N, \dfrac{2}{N}\right)$ に従っていた．例えば，$P(X_{100} = 1) =$ **57** であり，これを計算すると $0.27065\cdots$ となる．
一般に，$k\ (= 0, 1, 2, \ldots)$ に比べて N が十分大きいとき，$P(X_N = k)$ は

$$P(X = k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2}$$

で近似できる．ここで，確率変数 X は平均 2 の **58** に従う．例えば，$k = 1$ とすると $P(X = 1) = 2e^{-2} = 0.27067\cdots$ となり，上の $P(X_{100} = 1)$ とほぼ一致することがわかる．
なお，$V(X)$ は $\lim_{N\to\infty} V(X_N)$ に等しく，その値は **59** である．

57 の解答群

⓪ 0.99^{99}　① 0.01×0.99^{99}　② 2×0.99^{99}　③ 4×0.99^{99}

④ 0.98^{99}　⑤ 0.02×0.98^{99}　⑥ 2×0.98^{99}　⑦ 4×0.98^{99}

58 の解答群

⓪ 一様分布　① 正規分布　② 指数分布

③ ポアソン分布　④ t 分布　⑤ カイ 2 乗分布

59 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{1}{4}$

⑧ e　⑨ e^2　ⓐ e^{-1}　ⓑ e^{-2}　ⓒ ∞

計算用紙

問 4　a を定数とする．確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ ax(2-x) & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (x > 2) \end{cases}$$

で与えられている．このとき $a = \boxed{\textbf{60}}$ であり，$E(X) = \boxed{\textbf{61}}$ である．また，X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると，

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \boxed{\textbf{62}} & (0 \leqq x \leqq 2) \\ \boxed{\textbf{63}} & (x > 2) \end{cases}$$

である．

$\boxed{\textbf{60}}$ ・ $\boxed{\textbf{61}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\dfrac{5}{4}$　⑥ 2

$\boxed{\textbf{62}}$ ・ $\boxed{\textbf{63}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\dfrac{5}{4}$　⑥ 2

⑦ $\dfrac{x(2-x)}{4}$　⑧ $\dfrac{x(2-x)}{2}$　⑨ $\dfrac{3x(2-x)}{4}$　ⓐ $x(2-x)$

ⓑ $\dfrac{x^2(3-x)}{12}$　ⓒ $\dfrac{x^2(3-x)}{6}$　ⓓ $\dfrac{x^2(3-x)}{4}$　ⓔ $\dfrac{x^2(3-x)}{3}$

計算用紙

問 5　A大学の学生 100 人を無作為に選び，1 日にテレビを視聴する時間を尋ねたところ，その結果は平均 156 分で，標準偏差は 75 分であった．A大学の学生全体のテレビ平均視聴時間を μ 分，標準偏差を σ 分とする．このとき μ に対する信頼度 95% の信頼区間を求めるために，次のように考えた．

100 人の学生それぞれのテレビ視聴時間を $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とおくと，これらは，すべて独立で平均 μ，標準偏差 σ の確率変数であるから

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は平均 $\boxed{\mathbf{64}}$，標準偏差 $\boxed{\mathbf{65}}$ の確率変数となる．

標本の大きさは 100 であり十分大きいので，$\overline{X}$ は正規分布に従うとしてよく，さらに $\sigma = 75$ としてよいので，確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\mathbf{66}}}$$

の分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．

さて，正規分布表によれば $\displaystyle\int_{-1.96}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0.95$ であるから

$$\begin{aligned} 0.95 &= P\left(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96\right) \\ &= P\left(-1.96 \times \boxed{\mathbf{66}} \leqq \overline{X} - \mu \leqq 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}}\right) \\ &= P\left(\overline{X} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}}\right) \end{aligned}$$

を得る．したがって，$\overline{X}$ の実現値を $\overline{x}$ とすると，μ に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\overline{x} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}},\ \overline{x} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{66}}\right]$$

である．$\overline{x}$ に値 156 を代入し，小数点以下第 1 位を四捨五入すれば，信頼区間は $\boxed{\mathbf{67}}$ である．

$\boxed{\mathbf{64}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② μ　③ 2μ　④ μ^2　⑤ $2\mu^2$

$\boxed{65}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② σ　③ 2σ

④ $\dfrac{\sigma}{10}$　⑤ $\dfrac{\sigma}{100}$　⑥ $\dfrac{\sigma^2}{10}$　⑦ $\dfrac{\sigma^2}{100}$

$\boxed{66}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 75　③ 75^2

④ $\dfrac{75}{10}$　⑤ $\dfrac{75^2}{10}$　⑥ $\dfrac{75}{100}$　⑦ $\dfrac{75^2}{100}$

$\boxed{67}$ **の解答群**

⓪ $\left[141, 155\right]$　① $\left[141, 157\right]$　② $\left[141, 171\right]$

③ $\left[155, 157\right]$　④ $\left[155, 171\right]$