全国工学系学部

工学系数学統一試験

2006年12月16日（土）
4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

∗ 受験分野は, 各大学の指示 に従ってください.

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること.

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと.

(3) 開始の合図の後, 表紙裏の**解答上の注意**を読むこと.

(4) 問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせること.

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること.

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること.

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが, どのページも切り離さないこと.

(8) 試験開始 40 分後から退席を認める.

(9) 問題冊子は持ち帰ること.

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること.

(11) その他, 監督者の指示に従うこと.

解答上の注意

(1) 解答は, 各問題の指示にしたがって解答用紙にマークすること. 例えば, $\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して ⓒと解答する場合は, 次のようにマークすること.

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 空欄に入れる適当なものがない場合には, ⓘをマークすること.

(3) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする.

(4) log は自然対数とする.

目次

空白

微分積分　(第１問, 第２問)

第 1 問　(微分積分 $1/_2$)　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{8}}$ 〕（配点 50 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

問 1　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = \boxed{\mathbf{1}}$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \boxed{\mathbf{2}}$ である.

$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $-\dfrac{1}{2}$　⑦ ∞　⑧ $-\infty$

問 2　$\displaystyle\int_1^{e^2} x\log x\,dx = \boxed{\mathbf{3}}$ である.

$\boxed{\mathbf{3}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{2}e^4+\dfrac{1}{4}e^2+\dfrac{1}{4}$　① $\dfrac{1}{2}e^4+\dfrac{1}{4}e^2-\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}e^4-\dfrac{1}{4}e^2+\dfrac{1}{4}$

③ $\dfrac{1}{2}e^4-\dfrac{1}{4}e^2-\dfrac{1}{4}$　④ $\dfrac{3}{4}e^4+\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{3}{4}e^4-\dfrac{1}{4}$

⑥ $\dfrac{1}{4}e^2+\dfrac{1}{4}$　⑦ $\dfrac{1}{4}e^2-\dfrac{1}{4}$　⑧ $-\dfrac{1}{4}e^2+\dfrac{1}{4}$

⑨ $e^4-\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{1}{2}$　ⓐ $e^4-\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2}$　ⓑ $\dfrac{5}{4}e^4-\dfrac{1}{4}$

問 3　関数 $f(x) = 2^x$ の導関数は $f'(x) = \boxed{\mathbf{4}}\, 2^x$ である．したがって $x = 0$ における $f(x)$ のテイラー展開 (マクローリン展開) は

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boxed{\mathbf{5}}}{n!} x^n$$

で与えられる．

$\boxed{\mathbf{4}}$，$\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ 2^n	⑤ $\dfrac{1}{2^n}$
⑥ e^2	⑦ e^{2n}	⑧ $\log 2$	⑨ $\dfrac{1}{\log 2}$	ⓐ $(\log 2)^n$	ⓑ $\dfrac{1}{(\log 2)^n}$
ⓒ $2x$	ⓓ $\dfrac{x}{2}$	ⓔ $\dfrac{x}{\log 2}$			

問 4　不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ を求める．$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{1+\cos x} = \boxed{\textbf{6}}, \qquad \frac{dx}{dt} = \boxed{\textbf{7}}$$

である．したがって $I = \boxed{\textbf{8}} + C$ (C は積分定数) である．

$\boxed{\textbf{6}}$, $\boxed{\textbf{7}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1+t}{1-t}$　① $\dfrac{1-t}{1+t}$　② $\dfrac{2}{1+t^2}$　③ $\dfrac{1+t^2}{2}$　④ $\dfrac{2t}{1+t^2}$

⑤ $\dfrac{1+t^2}{2t}$　⑥ $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　⑦ $\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

$\boxed{\textbf{8}}$ **の解答群**

⓪ $\sin x$　① $\cos x$　② $\tan x$　③ $\sin\dfrac{x}{2}$　④ $\cos\dfrac{x}{2}$　⑤ $\tan\dfrac{x}{2}$

第 2 問 (微分積分 $2/_2$) 〔解答番号 $\boxed{9}$ ～ $\boxed{15}$ 〕（配点 50 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

問 1 xy 平面において原点からの距離 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ を x, y の関数とみなすとき, 原点以外の点において, $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \boxed{9}$ であり, $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \boxed{10}$ である.

$\boxed{9}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{x}{x^2+y^2}$　① $\dfrac{y}{x^2+y^2}$　② $\dfrac{x}{2(x^2+y^2)}$　③ $-\dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$

④ $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$　⑤ $-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$　⑥ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$　⑦ $\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

⑧ $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　⑨ $\dfrac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$\boxed{10}$ **の解答群**

⓪ r　① $(x+y)\,r$　② $\dfrac{3}{r}$　③ $-\dfrac{3}{r}$　④ $\dfrac{2}{r}$

⑤ $-\dfrac{2}{r}$　⑥ $\dfrac{1}{r}$　⑦ $-\dfrac{1}{r}$　⑧ $\dfrac{2}{r^2}$　⑨ $-\dfrac{2}{r^2}$

ⓐ $\dfrac{2}{r} + \dfrac{x+y}{r^2}$　ⓑ $\dfrac{2}{r} - \dfrac{x+y}{r^2}$

問 2　xy 平面上の集合 D を $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; y \geqq 0,\ y \geqq -\sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 \leqq 4\right\}$ で定める．重積分

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{8}(x^2 + y^2)\right) dxdy$$

の値を求めるために $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ と変数変換を行う．このとき原点を除けば $(x, y) \in D$ であるための必要十分条件は

$$0 < r \leqq \boxed{\mathbf{11}} \quad \text{かつ} \quad \boxed{\mathbf{12}} \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{13}}$$

である．そこで

$$E = \left\{(r, \theta) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq \boxed{\mathbf{11}},\ \boxed{\mathbf{12}} \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{13}}\right\}$$

とおけば

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{8}(x^2 + y^2)\right) dxdy = \iint_E \boxed{\mathbf{14}}\ drd\theta = \boxed{\mathbf{15}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{11}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

$\boxed{\mathbf{12}}$, $\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$　⑤ $\dfrac{2\pi}{3}$

⑥ $\dfrac{3\pi}{4}$　⑦ $\dfrac{5\pi}{6}$　⑧ π　⑨ $\dfrac{7\pi}{6}$　ⓐ $\dfrac{5\pi}{4}$　ⓑ $\dfrac{4\pi}{3}$

ⓒ $\dfrac{3\pi}{2}$　ⓓ $\dfrac{5\pi}{3}$　ⓔ $\dfrac{7\pi}{4}$　ⓕ $\dfrac{11\pi}{6}$　ⓖ 2π

$\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ $\cos\left(\dfrac{\pi r}{8}\right)$　① $\cos\left(\dfrac{\pi r^2}{8}\right)$　② $r\cos\left(\dfrac{\pi r}{8}\right)$　③ $r\cos\left(\dfrac{\pi r^2}{8}\right)$

$\boxed{\mathbf{15}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{3}$	① $\dfrac{2}{3}$	② 1	③ $\dfrac{4}{3}$	④ 2	⑤ $\dfrac{8}{3}$
⑥ $\dfrac{\pi}{3}$	⑦ $\dfrac{2\pi}{3}$	⑧ π	⑨ $\dfrac{4\pi}{3}$	ⓐ 2π	ⓑ $\dfrac{8\pi}{3}$
ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	ⓓ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	ⓔ $\sqrt{2}$	ⓕ $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$	ⓖ $2\sqrt{2}$	

線形代数　(第3問, 第4問)

第 3 問　(線形代数 $1/_2$)　〔解答番号 $\boxed{16}$ 〜 $\boxed{28}$ 〕（配点 60 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

問 1　行列 A, B の積 AB を $A \times B$ と表すことにする. このとき $\boxed{16} \times \boxed{17}$ はスカラーになる. また $\boxed{18} \times \boxed{19}$ と $\boxed{20} \times \boxed{21}$ はともに 2 次正方行列になるが, $\boxed{18} \times \boxed{19}$ は正則行列であり, $\boxed{20} \times \boxed{21}$ は正則行列ではない.

$\boxed{16}$ 〜 $\boxed{21}$ の解答群

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　⑧ $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

問 2 行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{22}}$ である.

$\boxed{\mathbf{22}}$ の解答群

⓪ -6 ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1 ⑥ 0
⑦ 1 ⑧ 2 ⑨ 3 ⓐ 4 ⓑ 5 ⓒ 6

問 3 xy 平面において行列 $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 (線形変換) を行う．この変換によって大きさ (長さ) が変化しても方向が変わらない単位ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{\boxed{\mathbf{23}}}}\begin{pmatrix} -\boxed{\mathbf{24}} \\ \boxed{\mathbf{25}} \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\boxed{\mathbf{26}}}}\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{27}} \\ \boxed{\mathbf{28}} \end{pmatrix}$$

である.

$\boxed{\mathbf{23}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{28}}$ の解答群

⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6 ⑦ 7
⑧ 9 ⑨ 11 ⓐ 13 ⓑ 15 ⓒ 17

第 4 問 (線形代数 $2/_2$)　〔解答番号 $\boxed{\textbf{29}}$ ～ $\boxed{\textbf{36}}$ 〕（配点 40 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

(注意) $\mathbb{R}^4$ は 4 次元実数ベクトル空間を表す.

整数 a を含む行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 4 & 2 & -2 & a+1 \end{pmatrix}$$

を考える.

問 1 行列 A は $a = \boxed{\textbf{29}}$ のとき階数が 2 となり, $a \neq \boxed{\textbf{29}}$ のとき階数が $\boxed{\textbf{30}}$ となる.

$\boxed{\textbf{29}}$, $\boxed{\textbf{30}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

問 2 行列 A は 4 次元実数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ を $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 2x + y - z + w \\ x + 2y - 2z + a\,w \\ 4x + 2y - 2z + (a+1)\,w \end{pmatrix}$ に写す.

(1) $a = \boxed{\textbf{29}}$ のとき, 集合 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{\textbf{31}} \\ \boxed{\textbf{32}} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \boxed{\textbf{33}} \\ \boxed{\textbf{34}} \end{pmatrix}$

によって張られる 2 次元ベクトル空間となる.

一方 $a \neq \boxed{\textbf{29}}$ のとき, 集合 V は $\boxed{\textbf{35}}$.

(2) $a = \boxed{\textbf{29}}$ のとき, ベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を満たす 4 次元実数ベクトル $\boldsymbol{x}$ がなす集合を考えると, これは $\boxed{\textbf{36}}$.

$\boxed{\textbf{31}}$ 〜 $\boxed{\textbf{34}}$ の解答群

⓪ -6	① -5	② -4	③ -3	④ -2	⑤ -1	⑥ 0
⑦ 1	⑧ 2	⑨ 3	ⓐ 4	ⓑ 5	ⓒ 6	

$\boxed{\textbf{35}}$, $\boxed{\textbf{36}}$ の解答群

⓪ 空集合となる

① 空集合ではないが, ベクトル空間にならない

② 1 次元ベクトル空間となる

③ 2 次元ベクトル空間となる

④ 3 次元ベクトル空間となる

⑤ 4 次元ベクトル空間となる

⑥ 5 次元ベクトル空間となる

常微分方程式　(第5問, 第6問)

第 5 問　(常微分方程式 $1/_2$)　〔解答番号 $\boxed{37}$ ～ $\boxed{41}$ 〕（配点 50 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

(注意) 各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問 1　関数 $y(x)$ は微分方程式

$$y' = a\,y \qquad (\,a\text{ は正の定数}\,)$$

を満たし, $y(0) \neq 0$ とする. いま $y(5) = 2\,y(0)$ ならば, $y(x_1) = 8\,y(0)$ が成り立つ x_1 は $\boxed{37}$ である. また $a = \boxed{38}$ である.

$\boxed{37}$, $\boxed{38}$ の解答群

⓪ 3	① 5	② 8	③ 15	④ 16
⑤ 40	⑥ 125	⑦ $\dfrac{1}{5}\log 2$	⑧ $\dfrac{3}{5}\log 2$	⑨ $\dfrac{8}{5}\log 2$
ⓐ $\dfrac{1}{2}\log 5$	ⓑ $\dfrac{3}{5}\log 5$	ⓒ $\dfrac{8}{5}\log 5$		

問 2 微分方程式

$$y' + 2\,x\,y = x$$

の一般解は $y =$ $\boxed{\mathbf{39}}$ である.

$\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ $e^{x} + c$　① $e^{-x} + c$　② $e^{x^2} + c$　③ $e^{-x^2} + c$

④ $c\,e^{x} + \dfrac{1}{2}$　⑤ $c\,e^{-x} + \dfrac{1}{2}$　⑥ $c\,e^{x^2} + \dfrac{1}{2}$　⑦ $c\,e^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$

⑧ $c\,e^{x^2} + 1$　⑨ $c\,e^{-x^2} + 1$　ⓐ $c\,e^{x} + e^{-x}$　ⓑ $c\,e^{-x} + e^{x}$

(c は任意定数)

問 3　二つの微分方程式

$$\text{(a)} \quad y'' + y' + 4\,y = 0$$

$$\text{(b)} \quad y'' + y' - 6y = 0$$

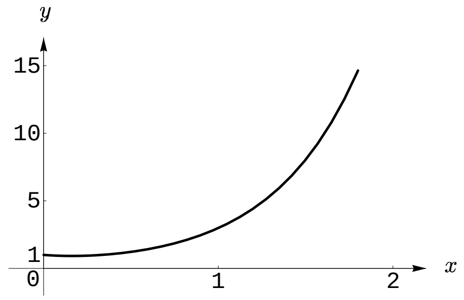
のそれぞれを同一の初期条件 $y(0) = 1,\, y'(0) = -1$ のもとで解き, $x \geqq 0$ における解のグラフの概形を考える.

- 方程式 (a) の解のグラフの概形は $\boxed{\textbf{40}}$ である.
- 方程式 (b) の解のグラフの概形は $\boxed{\textbf{41}}$ である.

（注意）次ページの解答群中のグラフでは x 軸, y 軸の目盛りはグラフごとに異なる.

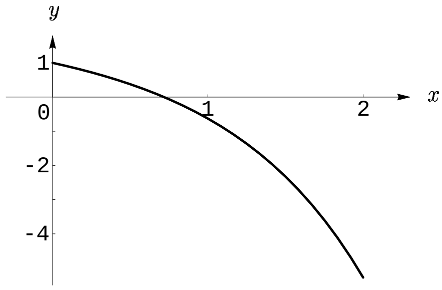
$\boxed{40}$, $\boxed{41}$ の解答群

⓪



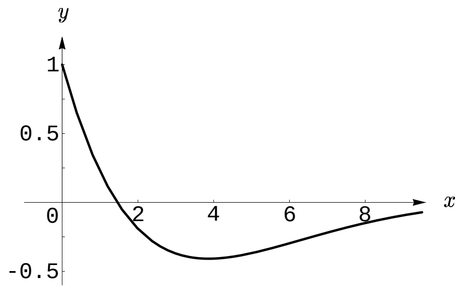
(説明) y は x が十分大きい範囲で単調増加し $x \to \infty$ のとき ∞ に発散する.

①



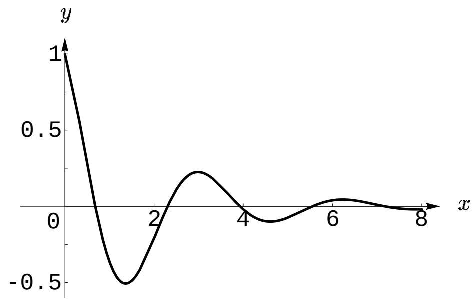
(説明) y は $x \geqq 0$ において単調減少し $x \to \infty$ のとき $-\infty$ に発散する.

②



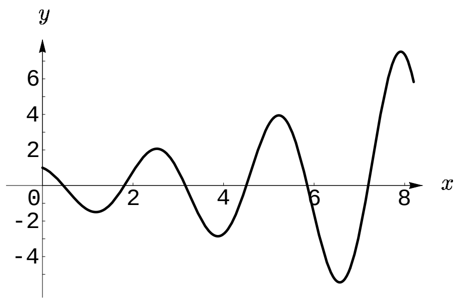
(説明) y は x が十分大きい範囲で単調増加し $x \to \infty$ のとき 0 に収束する.

③



(説明) y は $x \to \infty$ のとき, 正負の値を交互にとりながら 0 に収束する.

④



(説明) y は $x \to \infty$ のとき, 振動しつつ発散する.

第 6 問 (常微分方程式 $2/_2$) 〔解答番号 $\boxed{42}$ 〜 $\boxed{49}$ 〕(配点 50 点)

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

(注意) 各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

初期条件 $y(0) = 2, \ \ y'(0) = -3$ を満たす微分方程式

$$y'' + 3y' + 2y = f(x) \qquad \text{ただし,} \quad f(x) = \begin{cases} 10\cos x & \left(|x| \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(|x| > \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

の解を $x \geqq 0$ の範囲で求める.

問 1 まず同次方程式 $y'' + 3y' + 2y = 0$ を解く. この方程式の 1 次独立な解は,
$y_1(x) = e^{\boxed{42}\,x}$, $y_2(x) = e^{\boxed{43}\,x}$ である. ただし $\boxed{42} < \boxed{43}$ とする.

問 2 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, 与えられた微分方程式は $y'' + 3y' + 2y = 10\cos x$ になる. この方程式は特殊解 (特解) として

$$y = \boxed{44}\ \cos x + \boxed{45}\ \sin x$$

を持つ. これよりこの区間における初期値問題の解を $Y_1(x)$ とすると,

$$Y_1(x) = \boxed{46}\ y_1(x) + \boxed{47}\ y_2(x) + \boxed{44}\ \cos x + \boxed{45}\ \sin x$$

である.

$\boxed{42}$ 〜 $\boxed{47}$ の解答群

⓪ -7	① -6	② -5	③ -4	④ -3	⑤ -2
⑥ -1	⑦ 0	⑧ 1	⑨ 2	ⓐ 3	ⓑ 4
ⓒ 5	ⓓ 6	ⓔ 7			

問 3 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, 与えられた微分方程式は $y'' + 3y' + 2y = 0$ になる. この区間における解を $Y_2(x)$ とすると, 解 $Y_1(x)$ と $Y_2(x)$ は

$$Y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = Y_1\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad {Y_2}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = {Y_1}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす. したがって解 $Y_2(x)$ を

$$Y_2(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

と表すと $C_1 =$ **48** , $C_2 =$ **49** である.

48 , **49** **の解答群**

⓪ 0	① 1	② -1	③ 2
④ -2	⑤ $e^{\pi} + 3$	⑥ $-e^{\pi} - 3$	⑦ $-2\,e^{\pi} + 5$
⑧ $2\,e^{\pi} - 5$	⑨ $3\,e^{\pi/2} + 2$	ⓐ $4\,e^{\pi/2} + 1$	ⓑ $3\,e^{\pi/2} - 2$
ⓒ $5\,e^{\pi/2} - 4$			

確率・統計　(第7問, 第8問)

第 7 問　(確率・統計 1/2)

〔解答番号 $\boxed{\mathbf{50}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{61}}$ 〕（配点 60 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.
(注意) $P(A)$ は事象 A の起こる確率を表す.

問 1　離散型の確率変数 X, Y は独立で, それぞれの確率分布は

X の値	0	1	2	3	4
確率	0.1	0.4	0.1	0.2	0.2

Y の値	0	1	2	3
確率	0.6	0.1	0.2	0.1

で与えられるとする. このとき確率　$P(X+Y=5) = \boxed{\mathbf{50}}$ であり, $P(XY=0) = \boxed{\mathbf{51}}$ である. また Y の期待値は $E(Y) = \boxed{\mathbf{52}}$ であり, 分散は $V(Y) = \boxed{\mathbf{53}}$ である.

$\boxed{\mathbf{50}}$, $\boxed{\mathbf{51}}$ の解答群

⓪ 0　① 0.04　② 0.05　③ 0.06　④ 0.07　⑤ 0.08
⑥ 0.61　⑦ 0.62　⑧ 0.63　⑨ 0.64　ⓐ 0.65　ⓑ 0.66
ⓒ 0.67　ⓓ 0.68　ⓔ 0.69　ⓕ 0.7　ⓖ 0.71

$\boxed{\mathbf{52}}$, $\boxed{\mathbf{53}}$ の解答群

⓪ 0　① 0.5　② 0.6　③ 0.7　④ 0.8　⑤ 0.9　⑥ 1
⑦ 1.1　⑧ 1.15　⑨ 1.16　ⓐ 1.17　ⓑ 1.18　ⓒ 1.19　ⓓ 1.2
ⓔ 1.21　ⓕ 1.22

問 2 確率変数 X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とする．このとき $F(0) = 0,\ F(2) = 1$ ならば $F(-1) = \boxed{\mathbf{54}}$ であり $P(X > 3) = \boxed{\mathbf{55}}$ である．

問 3 確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 2)$ に従っているとき，X の確率密度関数を $f(x)$ とすると，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \boxed{\mathbf{56}}$．また X の分散 $V(X) = \boxed{\mathbf{57}}$ であるから，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \boxed{\mathbf{58}}$．

$\boxed{54}$ 〜 $\boxed{58}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

問 4 c は $c > -4$ を満たす定数とし，確率変数 X は閉区間 $[-4,\ c] = \{x \mid -4 \leqq x \leqq c\}$ 上の一様分布に従っているものとする．このとき $P(X \leqq -2) = \dfrac{1}{3}$ であるとすると，$c = \boxed{\mathbf{59}}$ である．また期待値は $E(X) = \boxed{\mathbf{60}}$ であり，$P(-3 \leqq X \leqq -1) = \boxed{\mathbf{61}}$ である．

$\boxed{59}$ 〜 $\boxed{61}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ -1　⑤ -2　⑥ -3

⑦ $\dfrac{1}{2}$　⑧ $\dfrac{1}{3}$　⑨ $\dfrac{1}{4}$　ⓐ $\dfrac{1}{6}$　ⓑ $\dfrac{1}{8}$　ⓒ $\dfrac{1}{12}$

第 8 問 (確率・統計 2/2) 〔解答番号 $\boxed{\mathbf{62}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{67}}$ 〕(配点 40 点)

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

A 大学のキャンパスの池にはウシガエルが多数生息している. U 教授の研究室では毎年この池のウシガエルの調査を行っている. 今までの調査によって, この池に生息するウシガエルの体長の分布は正規分布に従い, 体長の母分散 σ^2 は年によって変化はなく, $\sigma^2 = 35^2\ \mathrm{mm}^2$ と仮定してよいことがわかっている. 今年も 100 匹捕獲して体長を測定したところ, 100 匹の標本平均値は $\overline{x} = 165$ mm であった. そこでこの池に生息するすべてのウシガエルの体長の母平均 μ の信頼度 (信頼係数) 95% の信頼区間を以下のように求めた.

捕獲した 100 匹のウシガエルの体長を表す確率変数をそれぞれ $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とおくと, これらは独立で, すべて平均 μ, 分散 35^2 の正規分布 $N(\mu, 35^2)$ に従っている. ゆえに標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

の分布は平均 $\boxed{\mathbf{62}}$, 分散 $\dfrac{\sigma^2}{100} = \dfrac{35^2}{100}$ の正規分布である. そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \boxed{\mathbf{63}}}{\boxed{\mathbf{64}}}$$

とおけば, Z の分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ である. ここで正規分布表を調べると, およそ

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.95 \qquad \cdots\cdots (*)$$

であることがわかった. 式 $(*)$ を書きかえると,

$$P\left(\overline{X} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{65}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{65}}\right) = 0.95$$

となる. これから実際の標本平均値 $\overline{x}$ に対しても不等式

$$\overline{x} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{65}} \leqq \mu \leqq \overline{x} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{65}}$$

が成り立っていると推定する. これに数値を代入し計算した結果の小数点以下第 1 位を四捨五入すると, 求める母平均 μ の信頼度 95% の信頼区間は $\boxed{\mathbf{66}}$ (mm) $\leqq \mu \leqq$ $\boxed{\mathbf{67}}$ (mm) である.

$\boxed{\mathbf{62}}$, $\boxed{\mathbf{63}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② μ　③ μ^2　④ 100μ　⑤ $\dfrac{\mu}{100}$

$\boxed{\mathbf{64}}$, $\boxed{\mathbf{65}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{35^2}{100}$　① $\dfrac{35^2}{10}$　② $\dfrac{35}{10}$　③ $\dfrac{35}{100}$　④ $\sqrt{\dfrac{35}{10}}$

$\boxed{\mathbf{66}}$, $\boxed{\mathbf{67}}$ **の解答群**

⓪ 155　① 156　② 157　③ 158　④ 159　⑤ 160

⑥ 172　⑦ 173　⑧ 174　⑨ 175　ⓐ 176　ⓑ 177