# EMaT

# 工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

**2012年12月8日（土）**

**4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分**

**3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分**

**2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分**

**1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分**

∗ 受験分野は， 各大学の指示に従ってください．

## 受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．

(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(8) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(9) 問題冊子は持ち帰ること．

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．

(11) その他，監督者の指示に従うこと．

# 解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

| 23 | ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ |
|---|---|

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\mathbf{23}}$ は ( $\boxed{\mathbf{23}}$ ) という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-$ $\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は $x$ の自然対数とする．

# 目次

# 第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 6 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{19}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

**問 1**　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = \boxed{\mathbf{1}}$ である．

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x+\sin x} = \boxed{\mathbf{2}}$ である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪　$0$

①　$\dfrac{1}{4}$　②　$\dfrac{1}{2}$　③　$1$　④　$2$　⑤　$4$　⑥　$\infty$

⑦　$-\dfrac{1}{4}$　⑧　$-\dfrac{1}{2}$　⑨　$-1$　ⓐ　$-2$　ⓑ　$-4$　ⓒ　$-\infty$

(3)　自然対数の底 $e$ は，$n$ を自然数とする数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ の極限として導かれる．すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ である．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \boxed{\mathbf{3}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ **の解答群**

⓪　$0$　①　$1$　②　$\infty$　③　$-\infty$

④　$e$　⑤　$e^{-1}$　⑥　$e^{\frac{1}{2}}$　⑦　$e^{-\frac{1}{2}}$　⑧　$e^2$　⑨　$e^{-2}$

**解説**

(1)

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{1}$$

とみて，分母と分子を $x + \sqrt{x^2-1}$ 倍することにより

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= 0\end{aligned}$$

であるから，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ⓪ である．

(2)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

を利用すると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x+\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\frac{4x}{x+\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\frac{4}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1\cdot\frac{4}{1+1} = 2\end{aligned}$$

であるから $\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ④ である．

また，$x \to 0$ のとき 分子 $= \sin 4x \to 0$，分母 $= x + \sin x \to 0$ となることからロピタルの定理を用いて

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x+\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{1+\cos x} = \frac{4}{2} = 2$$

として求めることもできる．

(3) ネイピア数 (Napier’s constant) $e$ は $e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284\cdots$ によって定義される数であるが，これは連続変数の極限としてもよく，$e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ が成り立つ．したがって $a_n \to \infty$ を満たす任意の数列について

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

が成り立つ．特に $a_n = \dfrac{n}{2}$ とおけば

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2 = e^2.$$

したがって $\boxed{\mathbf{3}}$ の答えは ⑧ である．

**問 2**　実数全体で定義された 5 個の関数

$$f_1(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}\,, \qquad f_2(x) = \log(ax^2+b)\,, \qquad f_3(x) = e^{-ax^2+bx}$$

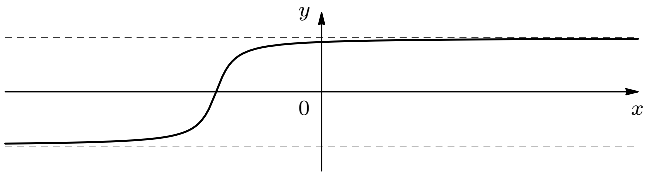
$$f_4(x) = \tan^{-1}(ax+b)\,, \qquad f_5(x) = e^{-x}\sin(ax^2+b)$$

を考える．ただし，$a, b$ は正の定数とする．

(1)　正数 $a$, $b$ の値に関係なくすべての $x$ について正の値をとる関数の組は $\boxed{\textbf{4}}$．

(2)　有界な関数の組は $\boxed{\textbf{5}}$．
（注意： 関数 $g(x)$ が有界であるとは，適当に正数 $M$ を選べばすべての $x$ について $|g(x)| < M$ となることである．）

(3)　関数のグラフの概形が，十分広い区間で下図のようになりえる関数の組は $\boxed{\textbf{6}}$．




(破線 --- はグラフの漸近線を表す)

$\boxed{\textbf{4}}$ ～ $\boxed{\textbf{6}}$ **の解答群**

⓪　存在しない

①　$\{f_1\}$　②　$\{f_2\}$　③　$\{f_3\}$　④　$\{f_4\}$　⑤　$\{f_5\}$

⑥　$\{f_1,\ f_2\}$　⑦　$\{f_1,\ f_3\}$　⑧　$\{f_1,\ f_4\}$　⑨　$\{f_1,\ f_5\}$

ⓐ　$\{f_2,\ f_3\}$　ⓑ　$\{f_2,\ f_4\}$　ⓒ　$\{f_3,\ f_4\}$　ⓓ　$\{f_4,\ f_5\}$

ⓔ　$\{f_1,\ f_3,\ f_4\}$　ⓕ　$\{f_1,\ f_3,\ f_5\}$　ⓖ　$\{f_1,\ f_4,\ f_5\}$　ⓗ　$\{f_3,\ f_4,\ f_5\}$

**解説**

問題文の中の $a$, $b$ は正の定数とあることに注意しよう．また 5 つの関数は全て $-\infty < x < \infty$ で連続である．したがって有限な極限値 $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ がともに存在すれば有界であることにも注意する．

関数 $f_1(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ の分母は $x^2+1 \geqq 1$ でつねに正であるが，$ax+b$ は $x < -\dfrac{b}{a}$ のときに $ax+b<0$ となる．また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x^2+1} = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{x^2+1} = 0$ が成り立ち，したがって有界である．

関数 $f_2(x) = \log(ax^2 + b)$ は, $b < 1$ の場合 $ax^2 + b < 1$ となる $x$ の区間がある．実際 $-\sqrt{\dfrac{1-b^2}{a}} < x < \sqrt{\dfrac{1-b^2}{a}}$ で $f_2(x) < 0$ となる．また $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \log(ax^2 + b) = \infty$ が成り立つので有界でない.

関数 $f_3(x) = e^{-ax^2+bx}$ はつねに正であり，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(-ax^2+bx) = -\infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} e^{-ax^2+bx} = 0$ が成り立つ．したがって有界である.

関数 $f_4(x) = \tan^{-1}(ax + b)$ は $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ より有界であり，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(ax + b) = \pm\infty$ (複号同順) と $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \tan^{-1} x = \pm\frac{\pi}{2}$ より $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \tan^{-1}(ax + b) = \pm\frac{\pi}{2}$(複号同順) が成り立ち，有界である.

関数 $f_5(x) = e^{-x}\sin(ax^2+b)$ は $e^{-x} > 0$ であるが $\sin(ax^2+b)$ の符号は一定でないのですべての $x$ について正の値を取ることはない．また $x \to \infty$ のとき $0 \leq |e^{-x}\sin(ax^2+b)| \leq e^{-x} \to 0$ より $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin(ax^2 + b) = 0$ である．一方 $x \to -\infty$ のとき $e^{-x} \to \infty$ であり $\sin(ax^2 + b)$ は 区間 $[-1, 1]$ の全ての値をとりながら振動するので $e^{-x}\sin(ax^2 + b)$ も振動し, 有界ではない.

以上より (1) 正数 $a, b$ の値に関係なくすべての $x$ について正の値をとる関数は $f_3$ のみであり $\boxed{\mathbf{4}}$ の答えは ③ である．(2) また有界であるのは $f_1$, $f_3$, $f_4$ であるから $\boxed{\mathbf{5}}$ の答えは ⓔ である．(3) 与えられたグラフのように $x \to \infty$, $x \to -\infty$ の時にそれぞれ 0 でない正負の極限を持つ関数は $f_4$ のみであるから $\boxed{\mathbf{6}}$ の答えは ④ である.

**問 3**　関数 $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$ を $x=0$ の近くで 2 次多項式 $p(x)=1+c_1\,x+c_2\,x^2$ によって近似する．

$$f'(x)=\boxed{\textbf{7}},\qquad f''(x)=\boxed{\textbf{8}}$$

であるからマクローリン展開（$x=0$ を中心とするテイラー展開）を利用すると $c_1=\boxed{\textbf{9}}$, $c_2=\boxed{\textbf{10}}$ となる．

**$\boxed{\textbf{7}}$ ・ $\boxed{\textbf{8}}$ の解答群**

⓪ $\dfrac{2\,(1+2x)}{(1+x+x^2)^{1/2}}$　① $\dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^{1/2}}$　② $\dfrac{1+2x}{2\,(1+x+x^2)^{1/2}}$

③ $\dfrac{3}{(1+x+x^2)^{3/2}}$　④ $\dfrac{3}{2\,(1+x+x^2)^{3/2}}$　⑤ $\dfrac{3}{4\,(1+x+x^2)^{3/2}}$

⑥ $\dfrac{2\,(1-2x-2x^2)}{(1+x+x^2)^{3/2}}$　⑦ $\dfrac{1-2x-2x^2}{2\,(1+x+x^2)^{3/2}}$　⑧ $\dfrac{1-2x-2x^2}{4\,(1+x+x^2)^{3/2}}$

**$\boxed{\textbf{9}}$ ・ $\boxed{\textbf{10}}$ の解答群**

⓪ $0$　① $1$　② $2$　③ $3$

④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{3}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{4}$　⑦ $\dfrac{3}{4}$　⑧ $\dfrac{1}{6}$

⑨ $\dfrac{1}{8}$　ⓐ $\dfrac{3}{8}$　ⓑ $\dfrac{1}{16}$　ⓒ $\dfrac{3}{16}$

**解説**

合成関数の微分であることに注意して計算すると

$$f'(x)=\frac{1+2x}{2(1+x+x^2)^{1/2}},\qquad f''(x)=\frac{3}{4(1+x+x^2)^{3/2}}$$

が得られる．したがって，$\boxed{\textbf{7}}$, $\boxed{\textbf{8}}$ の答えはそれぞれ ②，⑤ である．

また，マクローリンの定理から，ランダウの記号を用いれば，$x=0$ の近傍で

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2),\quad x\to 0$$

と書ける．

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=\frac{3}{4}$$

であるから

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^2), \quad x \to 0$$

となる．よって

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{3}{8}$$

である．したがって， $\boxed{\mathbf{9}}$ , $\boxed{\mathbf{10}}$ の答えはそれぞれ ④, ⓐ である．

**問 4**　$a$ を 0 でない定数とするとき，不定積分 $I = \displaystyle\int e^{ax}\sin x\,dx$ を計算する．

$$\begin{aligned} I &= \boxed{\mathbf{11}} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\cos x\,dx \\ &= \boxed{\mathbf{11}} + \boxed{\mathbf{12}} - \frac{1}{a^2}I \end{aligned}$$

より

$$I = \boxed{\mathbf{13}} \qquad \text{(積分定数は省略)}$$

となる．

**$\boxed{11}$・$\boxed{12}$ の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $e^{ax}\sin x$ | ① $ae^{ax}\sin x$ | ② $\dfrac{1}{a}e^{ax}\sin x$ | ③ $\dfrac{1}{a^2}e^{ax}\sin x$ |
| ④ $e^{ax}\cos x$ | ⑤ $ae^{ax}\cos x$ | ⑥ $\dfrac{1}{a}e^{ax}\cos x$ | ⑦ $\dfrac{1}{a^2}e^{ax}\cos x$ |
| ⑧ $-e^{ax}\sin x$ | ⑨ $-ae^{ax}\sin x$ | ⓐ $-\dfrac{1}{a}e^{ax}\sin x$ | ⓑ $-\dfrac{1}{a^2}e^{ax}\sin x$ |
| ⓒ $-e^{ax}\cos x$ | ⓓ $-ae^{ax}\cos x$ | ⓔ $-\dfrac{1}{a}e^{ax}\cos x$ | ⓕ $-\dfrac{1}{a^2}e^{ax}\cos x$ |

**$\boxed{13}$ の解答群**

| | |
|---|---|
| ⓪ $\dfrac{e^{ax}}{a^2+1}(a\cos x + \sin x)$ | ① $\dfrac{e^{ax}}{a^2+1}(a\cos x - \sin x)$ |
| ② $\dfrac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x + \cos x)$ | ③ $\dfrac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x - \cos x)$ |
| ④ $\dfrac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x + \sin x)$ | ⑤ $\dfrac{e^{ax}}{a^2+1}(a\cos x - \cos x)$ |
| ⑥ $\dfrac{ae^{ax}}{a^2+1}(a\cos x + \sin x)$ | ⑦ $\dfrac{ae^{ax}}{a^2+1}(a\cos x - \sin x)$ |
| ⑧ $\dfrac{ae^{ax}}{a^2+1}(a\sin x + \cos x)$ | ⑨ $\dfrac{ae^{ax}}{a^2+1}(a\sin x - \cos x)$ |

**解説**

部分積分を 2 回行うことにより

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^{ax} \sin x \, dx \\
&= \int \left( \frac{1}{a} e^{ax} \right)' \sin x \, dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a} \int e^{ax} \cos x \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a} \int \left( \frac{1}{a} e^{ax} \right)' \cos x \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{a} e^{ax} \ \cos x - \int \frac{1}{a} e^{ax} (-\sin x) \, dx \right\} \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a^2} e^{ax} \cos x - \frac{1}{a^2} \int e^{ax} \sin x \, dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a^2} e^{ax} \cos x - \frac{1}{a^2} I
\end{aligned}
$$

であるから $\boxed{\mathbf{11}}$ , $\boxed{\mathbf{12}}$ の答えはそれぞれ ②, ⓕ である．また

$$
I = \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a^2} e^{ax} \cos x - \frac{1}{a^2} I
$$

より

$$
I = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} (a \sin x - \cos x)
$$

となるので $\boxed{\mathbf{13}}$ の答えは ③ である．

**問 5** $-\infty < x < \infty$ で微分可能な関数 $f(x)$ に対して $u(x,y)$ を

$$u(x,y) = \int_{x-2y}^{x+2y} f(t)\,dt$$

と定義する．これに対して $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を考えると

$$u(x,y) = \boxed{\mathbf{14}}$$

が成り立つ．これより $u(x,y)$ は式 $\boxed{\mathbf{15}}$ をみたすことがわかる．

**$\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群**

⓪ $F(x+2y)+F(x-2y)$　　① $F(x+2y)-F(x-2y)$

② $F(x+2y)+F(x-2y)-F(x)-F(2y)$

③ $F(x+2y)-F(x-2y)-F(x)+F(2y)$

**$\boxed{\mathbf{15}}$ の解答群**

⓪ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　① $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

② $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$　　③ $4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

④ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$　　⑤ $4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

**解説**

関数 $u(x,y)$ に対して

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{x-2y}^{x+2y} f(t)\,dt = \int_{x-2y}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{x+2y} f(t)\,dt \\ &= -\int_0^{x-2y} f(t)\,dt + \int_0^{x+2y} f(t)\,dt = -F(x-2y) + F(x+2y) \end{aligned}$$

が成り立つので，$\boxed{\mathbf{14}}$ の答えは ① である．また，$v = x+2y$, $w = x-2y$ とおくと，

$u(x,y)=F(v)-F(w)$ と表せる．これより，$\dfrac{dF}{dx}=f(x)$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{dF}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{dF}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}=f(v)-f(w) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{df}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{df}{dv}-\frac{df}{dw} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{dF}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{dF}{dw}\frac{\partial w}{\partial y}=2f(v)+2f(w) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2\frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{df}{dw}\frac{\partial w}{\partial y}=4\frac{df}{dv}-4\frac{df}{dw}
\end{aligned}$$

となることがわかる．よって

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

が成り立つ．したがって， $\boxed{\mathbf{15}}$ の答えは ⑤ である．

**問 6**　$xy$ 平面上の集合 $D$ が

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x^3 \leqq y \leqq 1 \right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D x^2 \sqrt{1+3y^2}\, dxdy$$

の値を求める．集合 $D$ は

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ \boxed{\mathbf{16}} \leqq x \leqq \boxed{\mathbf{17}} \right\}$$

と表されるので，

$$I = \int_0^1 \left\{ \sqrt{1+3y^2} \left( \int_{\boxed{\mathbf{16}}}^{\boxed{\mathbf{17}}} x^2\, dx \right) \right\} dy = \int_0^1 \boxed{\mathbf{18}}\, dy = \boxed{\mathbf{19}}$$

となる．

**$\boxed{\mathbf{16}}$ ・ $\boxed{\mathbf{17}}$ の解答群**

⓪ $0$　① $1$　② $y^{\frac{1}{3}}$　③ $y$　④ $y^3$

**$\boxed{\mathbf{18}}$ の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+3y^2}$　① $\dfrac{1}{2}y^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+3y^2}$　② $y^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+3y^2}$

③ $\dfrac{1}{3}y^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+3y^2}$　④ $\dfrac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+3y^2}$　⑤ $y^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+3y^2}$

⑥ $\dfrac{1}{3}y\sqrt{1+3y^2}$　⑦ $\dfrac{1}{2}y\sqrt{1+3y^2}$　⑧ $y\sqrt{1+3y^2}$

**$\boxed{\mathbf{19}}$ の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{27}$　① $\dfrac{2}{27}$　② $\dfrac{4}{27}$　③ $\dfrac{5}{27}$　④ $\dfrac{7}{27}$　⑤ $\dfrac{8}{27}$

⑥ $\dfrac{1}{9}$　⑦ $\dfrac{2}{9}$　⑧ $\dfrac{1}{3}$　⑨ $\dfrac{2}{3}$　ⓐ $1$

**解説**

集合 $D$ は曲線 $y=x^3$ と 2 直線 $x=0, y=1$ によって囲まれた領域である．$y=x^3$ より $x=y^{\frac{1}{3}}$ となるので，$x$ の範囲は $0 \leqq x \leqq y^{\frac{1}{3}}$ と書ける．一方，$y$ の範囲は，$0 \leqq y \leqq 1$ であるから，$D$ は

$$D=\{(x,y)|0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq y^{\frac{1}{3}}\}$$

のように表せる．ゆえに $\boxed{\textbf{16}}$ の答えは ⓪ であり，$\boxed{\textbf{17}}$ の答えは ② である．

$$\int_0^{y^{\frac{1}{3}}} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}y$$

より，

$$I=\int_0^1 \frac{1}{3}\,y\sqrt{1+3y^2}\,dy$$

となるので，$\boxed{\textbf{18}}$ の答えは ⑥ である．

$I$ を計算するために $t=y^2$ とおいて置換積分を行う．このとき $ydy=\dfrac{1}{2}dt$ であり，$t$ に関する積分範囲は，$0 \leqq t \leqq 1$ となるので

$$I=\frac{1}{6}\int_0^1 \sqrt{1+3t}\,dt = \frac{1}{6}\left[\frac{2}{9}(1+3t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\,4^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{9}\right)=\frac{7}{27}.$$

ゆえに $\boxed{\textbf{19}}$ の答えは ④ である．

# 第２分野　線形代数

〔 問１～問５ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{20}}$ ～ $\boxed{\mathbf{36}}$ 〕

**問１**　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1)　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を各列とする 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\mathbf{20}}$ である．これを用いると，4 次正方行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|B|$ の値は $\boxed{\mathbf{21}}$ であることがわかる．

**$\boxed{\mathbf{20}}$ ・ $\boxed{\mathbf{21}}$ の解答群**

⓪　0

①　1　②　2　③　3　④　4　⑤　5　⑥　6　⑦　7　⑧　8

⑨　$-1$　ⓐ　$-2$　ⓑ　$-3$　ⓒ　$-4$　ⓓ　$-5$　ⓔ　$-6$　ⓕ　$-7$　ⓖ　$-8$

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に対して，

$$G\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad G\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad G\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をみたす行列 $G$ の $(2,3)$ 成分（ $(2,3)$ 要素ともいう）は，$\boxed{\mathbf{22}}$ である．

**$\boxed{\mathbf{22}}$ の解答群**

⓪ $0$

① $1$ ② $2$ ③ $3$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$ ⑥ $\frac{1}{3}$ ⑦ $\frac{2}{3}$ ⑧ $\frac{4}{3}$

⑨ $-1$ ⓐ $-2$ ⓑ $-3$ ⓒ $-\frac{1}{2}$ ⓓ $-\frac{3}{2}$ ⓔ $-\frac{1}{3}$ ⓕ $-\frac{2}{3}$ ⓖ $-\frac{4}{3}$

**解説**

(1) 行列式 $|A|$ の値は

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -3.$$

行列式 $|B|$ は 1 行目で展開すると，

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2|A| = (-2)(-3) = 6.$$

したがって，$\boxed{\mathbf{20}}$，$\boxed{\mathbf{21}}$ はそれぞれ ⓑ, ⑥ である．

(2)

$$GA = (G\boldsymbol{v}_1 \ \ G\boldsymbol{v}_2 \ \ G\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$G$ は $A$ の逆行列である．すると，余因子を用いて行列 $G$ の $(2,3)$ 成分を求めることができて，その値は

$$\frac{(-1)^{2+3}}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-1}{-3}\cdot(-1) = -\frac{1}{3}.$$

したがって，$\boxed{\textbf{22}}$ は ⓔ である．

**問 2**　空間内の 3 点 A$(1,2,4)$，B$(1,-1,1)$，C$(a,1,-2)$ と原点 O が同一平面上に存在するように定数 $a$ を定める．これら 4 つの点が同一平面上に存在するための必要十分条件は，3 つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が $\boxed{\mathbf{23}}$ ことである．これから，$a = \boxed{\mathbf{24}}$ が求まる．

**$\boxed{\mathbf{23}}$ の解答群**

⓪ 1 次独立（線形独立）である　① 1 次従属（線形従属）である

② 直交する　③ 直交しない

**$\boxed{\mathbf{24}}$ の解答群**

⓪ $0$

① $1$　② $2$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{3}$　⑥ $\frac{2}{3}$　⑦ $\frac{4}{3}$

⑧ $-1$　⑨ $-2$　ⓐ $-\frac{1}{2}$　ⓑ $-\frac{3}{2}$　ⓒ $-\frac{1}{3}$　ⓓ $-\frac{2}{3}$　ⓔ $-\frac{4}{3}$

**解説**

空間内の 3 点 A$(1,2,4)$，B$(1,-1,1)$，C$(a,1,-2)$ と原点 O が同一平面上に存在するための必要十分条件は，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が 1 次従属（線形従属）であることである．このとき，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}} \ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}} \ \ \overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3(2a+3) = 0$$

が成り立つので，$a = -\frac{3}{2}$ である．　これより，$\boxed{\mathbf{23}}$，$\boxed{\mathbf{24}}$ はそれぞれ ①, ⓑ である．

**問 3**　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 5y + az = b \end{cases}$$

について考える．ただし $a, b$ は定数とする．

(1)　方程式 $(*)$ に対応して同じ係数をもつ連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 5y + az = 0 \end{cases}$$

を考えたとき，この方程式の解が $x = y = z = 0$ のただ 1 つであるのは $a \neq$ $\boxed{\textbf{25}}$ のときである．

(2)　$a =$ $\boxed{\textbf{25}}$ のとき，方程式の係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & a \end{pmatrix}$ の階数（ランク）は $\boxed{\textbf{26}}$ である．

(3)　$a =$ $\boxed{\textbf{25}}$ のとき，最初の方程式 $(*)$ が解をもつのは $b =$ $\boxed{\textbf{27}}$ のときである．このとき，$(*)$ は無数の解をもち，$y = 2t$ ($t$ は任意の実数) とおけば

$$x = \boxed{\textbf{28}}, \quad z = \boxed{\textbf{29}}$$

と表せる．

**$\boxed{\textbf{25}}$ ～ $\boxed{\textbf{27}}$ の解答群**

⓪　0

①　1　②　2　③　3　④　4　⑤　6　⑥　8　⑦　9　⑧　10

⑨　−1　ⓐ　−2　ⓑ　−3　ⓒ　−4　ⓓ　−6　ⓔ　−8　ⓕ　−9　ⓖ　−10

**$\boxed{28}$ ・ $\boxed{29}$ の解答群**

⓪ $-2t+3$　① $2t-3$　② $2t-\dfrac{1}{3}$　③ $2t+\dfrac{1}{3}$

④ $3t-\dfrac{5}{2}$　⑤ $3t+\dfrac{5}{2}$　⑥ $-4t-4$　⑦ $-4t+4$

⑧ $5t-2$　⑨ $5t+2$　ⓐ $5t-\dfrac{2}{3}$　ⓑ $5t+\dfrac{2}{3}$

ⓒ $5t-\dfrac{3}{2}$　ⓓ $5t+\dfrac{5}{2}$

**解説**

(1) 同次連立 1 次方程式の解がただ 1 つであるための必要十分条件は，係数行列式が 0 でない，すなわち

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & a-2 \end{vmatrix} = 3(a+2) \neq 0$$

のときである．すると，$a \neq -2$ なので，$\boxed{25}$ は ⓐ である．

(2) $a=-2$ のとき，係数行列と相似な階段行列を基本変形により求めると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，係数行列の階数（ランク）は 2 である．したがって，$\boxed{26}$ は ② である．

(3) $a=-2$ のとき，方程式 $(*)$ が解をもつのは拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & b \end{pmatrix}$ の階数（ランク）が 2 のときである．一方，基本変形により

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -4 & b+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & b-9 \end{pmatrix}$$

とできるから，$b=9$ のとき方程式 $(*)$ は解をもつ．すると，方程式 $(*)$ は

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ \quad 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

と同値であり，その解は $y=2t$ ($t$ は任意の実数) とおけば

$$x=-4t+4, \quad z=3t-\frac{5}{2}$$

と表せる．したがって， $\boxed{\textbf{27}}$ , $\boxed{\textbf{28}}$ , $\boxed{\textbf{29}}$ はそれぞれ ⑦, ⑦, ④ である．

**問 4**　連立 1 次方程式

$$(*) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \qquad ただし,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

を解く．ここで行列 $A$ が

$$下三角行列 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad と上三角行列 \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

によって $A = BC$ と表されることを利用する．

方程式 $(*)$ は，$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$ とおくと, $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$ となる．$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおいて書き直すと

$$\begin{cases} y_1 & & & = & 1 \\ -y_1 & + & y_2 & & = & 0 \\ -y_1 & - & 3y_2 & + & y_3 & = & -2 \end{cases}$$

であるから，上から順に解いて, $y_1 = 1$, $y_2 = \boxed{\textbf{30}}$, $y_3 = \boxed{\textbf{31}}$ を得る．したがって方程式 $(*)$ は

$$C\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{30}} \\ \boxed{\textbf{31}} \end{pmatrix}$$

に帰着される．$\boldsymbol{x}$ について同様に解くと，$\boldsymbol{x} = \boxed{\textbf{32}}$ が求まる．

**$\boxed{\textbf{30}}$ ・ $\boxed{\textbf{31}}$ の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 6　⑥ 8　⑦ 9　⑧ 10

⑨ $-1$　ⓐ $-2$　ⓑ $-3$　ⓒ $-4$　ⓓ $-6$　ⓔ $-8$　ⓕ $-9$　ⓖ $-10$

$\boxed{\mathbf{32}}$ **の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ | ① $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ | ② $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ | ③ $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ |
| ④ $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ | ⑤ $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ | ⑥ $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ | ⑦ $\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ |
| ⑧ $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ | ⑨ $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ | ⓐ $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ | ⓑ $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ |

**解説**

　方程式

$$\begin{cases} y_1 & & & = 1 \\ -y_1 & +y_2 & & = 0 \\ -y_1 & -3y_2 & +y_3 & = -2 \end{cases}$$

を上から順に解けば,

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 2.$$

すると，方程式 $(*)$ は $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, すなわち

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 1 \\ & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & 2x_3 & = 2 \end{cases}$$

に帰着され，これを下から順に解けば,

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

したがって， $\boxed{\mathbf{30}}$ , $\boxed{\mathbf{31}}$ , $\boxed{\mathbf{32}}$ はそれぞれ ①, ②, ⑤ である.

**問 5**　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \quad (a \text{ は定数})$$

は，$a =$ $\boxed{\mathbf{33}}$ のとき直交する．

このとき，3 次の正方行列

$$A = \boldsymbol{u}\,{}^t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v}$$

を考える．ただし ${}^t\boldsymbol{u}$, ${}^t\boldsymbol{v}$ はそれぞれ $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の転置を表す．例えば，${}^t\boldsymbol{u} = (-1, 2, 1)$ である．

$$(\boldsymbol{u}\,{}^t\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u} = \boxed{\mathbf{34}}\,\boldsymbol{u}, \qquad (\boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{u} = \boxed{\mathbf{35}}\,\boldsymbol{u}$$

が成り立つから，$\boldsymbol{u}$ は $A$ の固有値 $\boxed{\mathbf{36}}$ に対応する固有ベクトルである．

**$\boxed{\mathbf{33}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{36}}$ の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8

⑨ −1　ⓐ −2　ⓑ −3　ⓒ −4　ⓓ −5　ⓔ −6　ⓕ −7　ⓖ −8

**解説**

2 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は内積

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot a + 1 \cdot 3 = 2(a+1) = 0,$$

すなわち $a = -1$ のとき直交する．すると，

$$(\boldsymbol{u}\,{}^t\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u} = 6\boldsymbol{u}, \qquad (\boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{u} = 0$$

が成り立ち，正方行列

$$A = \boldsymbol{u}\,{}^t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v}$$

に対して

$$A\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}\,{}^t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} = 6\boldsymbol{u}.$$

よって，$\boldsymbol{u}$ は $A$ の固有値 6 に対応する固有ベクトルである．したがって，$\boxed{\mathbf{33}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{36}}$ はそれぞれ ⑨, ⑥, ⓪, ⑥ である．

# 第３分野　常微分方程式

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{37}}$ ～ $\boxed{\mathbf{54}}$ 〕

(注意) 各問における $y$ は $x$ の関数であり, $y'$, $y''$ は $y$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す. また, 特殊解は特解ともいう.

**問 1**　微分方程式

$$(*) \qquad y' + y = 10\sin 2x$$

を解く.

(1)　対応する同次方程式

$$y' + y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{37}}$$

である.

**$\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群**

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $Ce^{x}$ | ① $e^{x} + C$ | ② $-e^{x} + C$ |
| ③ $Ce^{-x}$ | ④ $e^{-x} + C$ | ⑤ $-e^{-x} + C$ |
| ⑥ $C\sin x$ | ⑦ $\sin x + C$ | ⑧ $-\sin x + C$ |
| ⑨ $C\cos x$ | ⓐ $\cos x + C$ | ⓑ $-\cos x + C$ |

($C$ は任意定数)

(2)　微分方程式 $(*)$ の特殊解を

$$y_p(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$$

とおくと,

$$a = \boxed{\mathbf{38}}, \quad b = \boxed{\mathbf{39}}$$

である.

$\boxed{38}$ ・ $\boxed{39}$ **の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | | | | |
| ① $1$ | ② $2$ | ③ $3$ | ④ $4$ | ⑤ $5$ |
| ⑥ $-1$ | ⑦ $-2$ | ⑧ $-3$ | ⑨ $-4$ | ⓐ $-5$ |

(3)　(1)，(2) より，微分方程式 $(*)$ の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{40}}$$

である．

$\boxed{40}$ **の解答群**

| | |
|---|---|
| ⓪ $C\sin x + 2\cos 2x - 4\sin 2x$ | ① $C\cos x + 2\cos 2x - 4\sin 2x$ |
| ② $C\sin x - 4\cos 2x + 2\sin 2x$ | ③ $C\cos x - 4\cos 2x + 2\sin 2x$ |
| ④ $Ce^{x} + 2\cos 2x - 4\sin 2x$ | ⑤ $Ce^{-x} + 2\cos 2x - 4\sin 2x$ |
| ⑥ $Ce^{x} - 4\cos 2x + 2\sin 2x$ | ⑦ $Ce^{-x} - 4\cos 2x + 2\sin 2x$ |
| ⑧ $\sin x + 2\cos 2x - 4\sin 2x$ | ⑨ $\cos x + 2\cos 2x - 4\sin 2x$ |
| ⓐ $\sin x - 4\cos 2x + 2\sin 2x$ | ⓑ $\cos x - 4\cos 2x + 2\sin 2x$ |
| ⓒ $e^{x} + 2\cos 2x - 4\sin 2x$ | ⓓ $e^{-x} + 2\cos 2x - 4\sin 2x$ |
| ⓔ $e^{x} - 4\cos 2x + 2\sin 2x$ | ⓕ $e^{-x} - 4\cos 2x + 2\sin 2x$ |

($C$ は任意定数)

**解説**

(1) 対応する同次方程式 $y' + y = 0$ は変数分離形であるから

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} + y = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \frac{dy}{dx} = -y \\
\Longrightarrow\quad & \int \frac{dy}{y} = -\int dx + C_0 \\
\Longrightarrow\quad & \log|y| = -x + C_0 \\
\Longrightarrow\quad & |y| = e^{-x+C_0} \\
\Longrightarrow\quad & y = \pm e^{C_0} e^{-x} \\
\Longrightarrow\quad & y = Ce^{-x} \quad (\pm e^{C_0} \text{ を } C \text{ とおき直した}).
\end{aligned}
$$

したがって $\boxed{\textbf{37}}$ の解は ③ である．

(2) $y_p(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ を $(*)$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
y_p' + y_p =& -2a\sin 2x + 2b\cos 2x + a\cos 2x + b\sin 2x \\
=&(2b+a)\cos 2x + (b-2a)\sin 2x = 10\sin 2x
\end{aligned}
$$

より $2b + a = 0,\ b - 2a = 10$ である．これを解いて $a = -4,\ b = 2$ である．したがって $\boxed{\textbf{38}}$，$\boxed{\textbf{39}}$ の答えは，それぞれ ⑨, ② である．

(3) 線型微分方程式の一般解は

対応する同次方程式の一般解 + 特殊解

であるから

$$
y(x) = Ce^{-x} - 4\cos 2x + 2\sin 2x.
$$

したがって $\boxed{\textbf{40}}$ の答えは ⑦ である．

**問 2**　微分方程式

$$(*) \qquad y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$$

を考える．このとき，

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

とおくと $y' = \boxed{\mathbf{41}}$ となるから，$u(x)$ に関する微分方程式

$$(**) \qquad u' = \boxed{\mathbf{42}}$$

が得られる．この方程式 $(**)$ の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{\mathbf{43}}$$

である．したがって，$(*)$ の一般解は $y(x) = x\,\boxed{\mathbf{43}}$ となる．さらに，方程式 $(*)$ の解で初期条件 $y(1) = 1$ をみたすものは

$$y(x) = \boxed{\mathbf{44}}$$

である．

**$\boxed{\mathbf{41}}$ の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $u'$ | ① $-u'$ | ② $u + u'$ | ③ $u - u'$ |
| ④ $xu'$ | ⑤ $-xu'$ | ⑥ $u + xu'$ | ⑦ $u - xu'$ |
| ⑧ $-u - u'$ | ⑨ $-u + u'$ | ⓐ $-u - xu'$ | ⓑ $-u + xu'$ |

**$\boxed{\mathbf{42}}$ の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ $u$ | ① $-u$ | ② $u^2$ | ③ $-u^2$ | ④ $u - u^2$ |
| ⑤ $xu$ | ⑥ $-xu$ | ⑦ $xu^2$ | ⑧ $-xu^2$ | ⑨ $x(u - u^2)$ |
| ⓐ $\dfrac{u}{x}$ | ⓑ $-\dfrac{u}{x}$ | ⓒ $\dfrac{u^2}{x}$ | ⓓ $-\dfrac{u^2}{x}$ | ⓔ $-\dfrac{u - u^2}{x}$ |

$\boxed{\mathbf{43}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{\log|x|+C}$　① $\dfrac{C}{\log|x|-1}$　② $\dfrac{1}{\log|x|-1}+C$

③ $\dfrac{1}{x+C}$　④ $\dfrac{C}{x}$　⑤ $\dfrac{1}{x}+C$

⑥ $\dfrac{1}{x^2+C}$　⑦ $\dfrac{C}{x^2}$　⑧ $\dfrac{1}{x^2}+C$

⑨ $Ce^x$　ⓐ $e^x+C$　ⓑ $Ce^{-x}$

ⓒ $e^{-x}+C$

($C$ は任意定数)

$\boxed{\mathbf{44}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{-x}{\log|x|-1}$　① $\dfrac{x}{\log|x|+1}$　② $\dfrac{x}{\log|x|-1}+2$

③ $\dfrac{2x}{x+1}$　④ $\dfrac{2x}{x^2+1}$　⑤ $\dfrac{1}{x}$

⑥ $xe^{x-1}$　⑦ $xe^{-x+1}$　⑧ $xe^x+(1-e)x$

⑨ $xe^{-x}+(1-e^{-1})x$

**解説**

$u(x)=\dfrac{y(x)}{x}$ とおくと $y(x)=xu(x)$ であるから，両辺を $x$ で微分して $y'=u+xu'$ となる．したがって $\boxed{\mathbf{41}}$ の答えは ⑥ である．また

$$u+xu'=y'=\frac{xy-y^2}{x^2}=u-u^2$$

であるから

$$u'=-\frac{u^2}{x}$$

となるので， $\boxed{\textbf{42}}$ の答えは ⓓ である．これを解くと

$$
\begin{aligned}
& \frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{x} \\
\Longrightarrow \quad & -\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + C \\
\Longrightarrow \quad & \frac{1}{u} = \log|x| + C \\
\Longrightarrow \quad & u = \frac{1}{\log|x| + C}
\end{aligned}
$$

となるので， $\boxed{\textbf{43}}$ の答えは ⓪ である．また $(*)$ の一般解は $y(x) = xu(x) = \dfrac{x}{\log|x| + C}$ である．これに初期条件 $y(1) = 1$ を代入すると $C = 1$ となるので $\boxed{\textbf{44}}$ の答えは ① である．

**問 3** 非線形微分方程式

$$(*) \qquad y' = y - 2y^2$$

を考える． $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ とおくと，方程式 $(*)$ は $z$ に関する線形微分方程式

$$(**) \qquad z' = \boxed{\mathbf{45}}$$

に書き直せる．方程式 $(**)$ の解で初期条件 $z(0) = z_0$ $(z_0 > 0)$ をみたすものは

$$z(x) = \boxed{\mathbf{46}}$$

と表せる．したがって $y = \dfrac{1}{z}$ より， $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) =$ $\boxed{\mathbf{47}}$ となる．

**$\boxed{\mathbf{45}}$ の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $-z-2$ | ① $-z-1$ | ② $-z$ | ③ $-z+1$ |
| ④ $-z+2$ | ⑤ $-2z-2$ | ⑥ $-2z-1$ | ⑦ $-2z$ |
| ⑧ $-2z+1$ | ⑨ $-2z+2$ | | |

**$\boxed{\mathbf{46}}$ の解答群**

| | |
|---|---|
| ⓪ $-2+(z_0+2)e^{-x}$ | ① $2+(z_0-2)e^{-x}$ |
| ② $-2+(z_0+2)e^{-2x}$ | ③ $2+(z_0-2)e^{-2x}$ |
| ④ $-1+(z_0+1)e^{-x}$ | ⑤ $1+(z_0-1)e^{-x}$ |
| ⑥ $-1+(z_0+1)e^{-2x}$ | ⑦ $1+(z_0-1)e^{-2x}$ |
| ⑧ $z_0e^{-x}$ | ⑨ $z_0e^{-2x}$ |

**$\boxed{\mathbf{47}}$ の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | | | |
| ① $\dfrac{1}{2}$ | ② $1$ | ③ $\dfrac{3}{2}$ | ④ $2$ |
| ⑤ $-\dfrac{1}{2}$ | ⑥ $-1$ | ⑦ $-\dfrac{3}{2}$ | ⑧ $-2$ |

**解説**

$y=\dfrac{1}{z}$ を $x$ で微分すると，$y'=-\dfrac{z'}{z^2}$．この式，および $y=\dfrac{1}{z}$ を $(*)$ に代入すると $z'=-z+2$ となる．ゆえに $\boxed{\mathbf{45}}$ の答えは ④ である．

$(**)$ は変数分離形の微分方程式なので，

$$\frac{z'}{-z+2}=1$$

と書き直せる．両辺を $x$ で積分すると

$$\int\frac{dz}{-z+2}=\int dx$$

$$-\log|-z+2|=x+c',\quad (c'\text{は任意定数})$$

が得られる．これを $z$ で表すと

$$z=ce^{-x}+2,\quad (c=\pm e^{-c'}).$$

上式に初期条件，$z(0)=z_0$ を代入すると $z_0=c+2$，ゆえに $c=z_0-2$．したがって，初期条件を満たす $(**)$ の解は

$$z=2+(z_0-2)e^{-x}$$

となる．ゆえに $\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは ① である．

$y=\dfrac{1}{z}$，および $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(z_0-2)e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{z_0-2}{e^x}=0$ より

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+(z_0-2)e^{-x}}=\frac{1}{2}.$$

ゆえに $\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは ① である．

**問 4**　微分方程式

$$y'' + 2k\,y' + 9\,y = 0 \qquad (k \text{ は定数})$$

について考える．

(1)　一般解は，

$k = 1$ のとき　　$y = \boxed{\textbf{48}}$

$k = 3$ のとき　　$y = \boxed{\textbf{49}}$

$k = 5$ のとき　　$y = \boxed{\textbf{50}}$

である．

(2)　$y'$ が常に負となる特殊解 $y(x)$ が存在するための必要十分条件は，$\boxed{\textbf{51}}$ である．

**$\boxed{48}$ 〜 $\boxed{50}$ の解答群**

⓪ $Ae^{-x} + Be^{-9x}$　① $Ae^{x} + Be^{9x}$　② $Ae^{-3x} + Be^{3x}$

③ $(A + Bx)e^{-3x}$　④ $(A + Bx)e^{3x}$

⑤ $(A + Bx)e^{-9x}$　⑥ $(A + Bx)e^{9x}$

⑦ $e^{-x}(A\cos 8x + B\sin 8x)$　⑧ $e^{-x}(A\cos 2\sqrt{2}x + B\sin 2\sqrt{2}x)$

⑨ $e^{x}(A\cos 8x + B\sin 8x)$　ⓐ $e^{x}(A\cos 2\sqrt{2}x + B\sin 2\sqrt{2}x)$

($A$, $B$ は任意定数)

**$\boxed{51}$ の解答群**

⓪ $k < 0$　① $k \geqq 0$　② $k = 0$

③ $|k| < 1$　④ $|k| = 1$　⑤ $|k| \geqq 1$

⑥ $|k| < 3$　⑦ $|k| = 3$　⑧ $|k| \geqq 3$

⑨ $|k| < 5$　ⓐ $|k| = 5$　ⓑ $|k| \geqq 5$

**解説**

(1) 微分方程式

$$y'' + 2ky' + 9y = 0$$

の特性方程式は

$$\lambda^2 + 2k\lambda + 9 = 0$$

である．この方程式の解は，判別式 $D/4 = k^2 - 9$ の符号によって 3 つに分類され

$$\lambda = \begin{cases} -k \pm \sqrt{9-k^2}\, i & (|k| < 3) \\ -k \quad (\text{重解}) & (k = \pm 3) \\ -k \pm \sqrt{k^2-9} & (|k| > 3) \end{cases}$$

となる．それぞれに応じて微分方程式の一般解は

$$\begin{aligned} &|k| < 3 \text{ のとき} \quad y = e^{-kx}\left\{A\cos(\sqrt{9-k^2}x) + B\sin(\sqrt{9-k^2}x)\right\} \\ &k = \pm 3 \text{ のとき} \quad y = (A+Bx)e^{-kx} \\ &|k| > 3 \text{ のとき} \quad y = Ae^{(-k+\sqrt{k^2-9})x} + Be^{(-k-\sqrt{k^2-9})x} \end{aligned}$$

となる ($A$ と $B$ は任意定数)．このことから，

- $k = 1$ のとき一般解は

  $$y = e^{-x}\left(A\cos 2\sqrt{2}x + B\sin 2\sqrt{2}x\right)$$

  である．したがって $\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは ⑧ である．

- $k = 3$ のとき一般解は

  $$y = (A+Bx)\,e^{-3x}$$

  である．したがって $\boxed{\mathbf{49}}$ の答えは ③ である．

- $k = 5$ のとき一般解は

  $$y = Ae^{-x} + Be^{-9x}$$

  である．したがって $\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは ⓪ である．

(2) 直観的に考えれば，$|k| < 3$ のとき，微分方程式の解はその形から，増減を周期的にくり返しながら減衰 (または増大) するので，$y'$ が常に負となる解は無いであろう．

$k \geqq 3$ のときは，$A, B$ を適当にとれば $y = e^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$ の形の解をもつ．また，$k \leqq -3$ のときは，$A, B$ を適当にとれば $y = -e^{\alpha x}$ $(\alpha > 0)$ の形の解をもつ．したがって，$|k| \geqq 3$ のときに $y'$ が常に負となる特殊解が存在する．

以上より $\boxed{\textbf{51}}$ の答えは $|k| \geqq 3$ となるので，⑧ である．

上のように直観をもとに考えれば答えは求まるが，厳密に論証を行うのは容易ではない．以下に一例を示す．

特性方程式 $\lambda^2 + 2k\lambda + 9 = 0$ が相異なる 2 つの実数解 $\alpha, \beta$ を持てば微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$

である．$\alpha, \beta$ は相異なるので，少なくとも一方は 0 でない．例えば $\alpha \neq 0$ として, $\alpha > 0$ ならば $A = -1,\ B = 0$ とおけば特殊解

$$y = -e^{\alpha x}$$

の $y'$ は常に負である．$\alpha < 0$ のときは $A = 1,\ B = 0$ とおけば特殊解

$$y = e^{\alpha x}$$

の $y'$ は常に負である．

特性方程式が 2 重解 を持つ場合は $k = 3$ となるので，$\lambda = -3$ となり一般解は

$$y = (A + Bx)\, e^{-3x}$$

そこで $A = 1,\ B = 0$ とおいた

$$y = e^{-3x}$$

の $y'$ は常に負である．

最後に，特性方程式が共役な虚数解 $p \pm qi$ $(q \neq 0)$ を持つときは一般解は

$$y = e^{px}\,(A\cos qx + B\sin qx)$$

である．まず $A = B = 0$ の場合は $y = 0$ となるので，$y'$ が常に負となることはない．そこで $A \neq 0$ または $B \neq 0$ と仮定しよう．両辺を微分すると

$$y' = e^{px}\,\{(pA + qB)\cos qx + (-qA + pB)\sin qx\}$$

となるが,

$$(pA + qB)^2 + (-qA + pB)^2 = (p^2 + q^2)(A^2 + B^2) \neq 0$$

であるから，$C=pA+qB$, $D=-qA+pB$ とおくとき，少なくとも一方は 0 でない．そこで

$$\sin\theta_0=\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}},\quad \cos\theta_0=\frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}$$

を満たす $\theta_0$ が存在する．このとき

$$\begin{aligned}
y'&=e^{px}\left\{((pA+qB)\cos qx+(-qA+pB)\sin qx\right\}\\
&=e^{px}\left(C\cos qx+D\sin qx\right)\\
&=\sqrt{C^2+D^2}e^{px}\left(\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}}\cos qx+\frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}\sin qx\right)\\
&=\sqrt{C^2+D^2}e^{px}\left(\sin\theta_0\cos qx+\cos\theta_0\sin qx\right)\\
&=\sqrt{C^2+D^2}e^{px}\sin(qx+\theta_0)
\end{aligned}$$

となる．したがってこのとき $y'$ は正負の値をとり，常に負となることはない．

以上より，$y'$ が常に負となる特殊解が存在する為の必要十分条件は, 特性方程式が実数解を持つこととなり，$\dfrac{1}{4}\times$ 判別式 $=k^2-9\geqq 0$ である．この条件は $|k|\geqq 3$ と表せるので，$\boxed{\textbf{51}}$ の答えは ⑧ である．

**問 5** 微分方程式

$$(*) \qquad y'' + 4y = e^{2x}$$

の解で初期条件

$$(**) \qquad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

をみたす $y(x)$ を求める．

(1) 対応する同次方程式 $y'' + 4y = 0$ の一般解は $y(x) = \boxed{\textbf{52}}$ である．

$\boxed{\textbf{52}}$ **の解答群**

⓪ $A\cos 2x + B\sin 2x$　① $A\cos 4x + B\sin 4x$

② $Ae^{2x} + Be^{-2x}$　③ $Ae^{4x} + Be^{-4x}$

④ $Ae^{2x} + Bxe^{2x}$　⑤ $Ae^{4x} + Bxe^{4x}$

⑥ $Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$　⑦ $Ae^{-4x} + Bxe^{-4x}$

($A$, $B$ は任意定数)

(2) 関数 $y_p(x) = ae^{2x}$ ($a$ は定数) が $(*)$ の特殊解になるのは，$a = \boxed{\textbf{53}}$ のときである．

$\boxed{\textbf{53}}$ **の解答群**

⓪ $0$　① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{4}$　⑥ $\frac{1}{3}$　⑦ $\frac{1}{2}$

(3)　以上より，初期条件 $(**)$ をみたす方程式 $(*)$ の解は $y(x) = \boxed{\mathbf{54}}$ である．

**$\boxed{\mathbf{54}}$ の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{3}\cos 2x + \dfrac{1}{12}\sin 2x + \dfrac{1}{6}e^{2x}$　① $\dfrac{3}{8}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\sin 2x + \dfrac{1}{8}e^{2x}$

② $\dfrac{3}{10}\cos 2x + \dfrac{1}{20}\sin 2x + \dfrac{1}{5}e^{2x}$　③ $\dfrac{3}{8}e^{2x} + \dfrac{1}{8}e^{-2x}$

④ $\dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2}xe^{2x}$　⑤ $\dfrac{1}{3}e^{-2x} + \dfrac{5}{6}xe^{-2x} + \dfrac{1}{6}e^{2x}$

⑥ $\dfrac{3}{10}e^{-2x} + \dfrac{7}{10}xe^{-2x} + \dfrac{1}{5}e^{2x}$　⑦ $\dfrac{3}{8}e^{-4x} + \dfrac{7}{4}xe^{-4x} + \dfrac{1}{8}e^{2x}$

⑧ $\dfrac{1}{3}e^{-4x} + \dfrac{3}{2}xe^{-4x} + \dfrac{1}{6}e^{2x}$　⑨ $\dfrac{3}{10}e^{-4x} + \dfrac{13}{10}xe^{-4x} + \dfrac{1}{5}e^{2x}$

**解説**

(1) 微分方程式 $y'' + 4y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 + 4 = 0$．この２次方程式の解は，$\lambda = \pm 2i$ となるので微分方程式の一般解は

$$y = A\,\cos 2x + B\,\sin 2x$$

と表せる．ゆえに $\boxed{\mathbf{52}}$ の答えは ⓪ である．

(2) 関数 $y_p = ae^{2x}$ を $(*)$ へ代入すると

$$4ae^{2x} + 4ae^{2x} = e^{2x}.$$

両辺の $e^{2x}$ の係数を比較すると，$8a = 1$．したがって，$a = \dfrac{1}{8}$ のとき $y_p$ は $(*)$ の特殊解となる．ゆえに $\boxed{\mathbf{53}}$ の答えは ② である．

(3) 方程式 $(*)$ の一般解は，対応する同次方程式 $y'' + 4y = 0$ の一般解と $(*)$ の特殊解 $y_p$ の和で表せる．すなわち

$$y = A\,\cos 2x + B\,\sin 2x + \frac{1}{8}e^{2x}.$$

この式に初期条件 $y(0) = \dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$A + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに，$A = \dfrac{3}{8}$．さらに

$$y' = -2A\,\sin 2x + 2B\,\cos 2x + \frac{1}{4}e^{2x}$$

へ初期条件 $y'(0) = \dfrac{1}{2}$ を代入すると $2B + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$，すなわち，$B = \dfrac{1}{8}$ となる．それゆえ初期条件 $(**)$ をみたす方程式 $(*)$ の解は

$$y = \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}e^{2x}$$

となる．ゆえに $\boxed{\mathbf{54}}$ の答えは ① である．

# 第4分野　確率・統計

〔問1～問5：解答番号 $\boxed{55}$ ～ $\boxed{72}$ 〕

(注意) 事象 $A$ に対し，$P(A)$ は $A$ の起こる確率を表す．また，確率変数 $X$ に対し，$E(X)$, $V(X)$, $D(X)$ はそれぞれ $X$ の期待値 (平均，平均値)，分散，標準偏差を表す．$\emptyset$ は空事象を表す．

**問1**　(1)　独立な確率変数 $X, Y$ の確率分布がそれぞれ次で与えられている．

| $X$ の値 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $Y$ の値 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |

このとき，確率変数 $X$ の期待値は $E(X) = \boxed{55}$ であり，分散は $V(X) = \boxed{56}$ である．また， $E(X-Y) = \boxed{57}$，$V(X-Y) = \boxed{58}$ である．

**$\boxed{55}$ ～ $\boxed{58}$ の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $2$ | ③ $3$ | |
| ④ $\frac{2}{3}$ | ⑤ $\frac{4}{3}$ | ⑥ $\frac{10}{3}$ | ⑦ $\frac{13}{3}$ | ⑧ $\frac{4}{9}$ |
| ⑨ $\frac{5}{9}$ | ⓐ $\frac{7}{9}$ | ⓑ $\frac{8}{9}$ | ⓒ $\frac{10}{9}$ | ⓓ $\frac{11}{9}$ |

(2)　確率変数 $X$ がパラメータ 1 のポアソン分布に従うものとする．すなわち，

$$P(X=k)=e^{-1}\frac{1}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

このとき，

$$P(X\leqq 1)=\boxed{\mathbf{59}}$$

である．

**$\boxed{59}$ の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $\dfrac{1}{4}$ | ② $\dfrac{1}{2}$ | ③ $1$ | |
| ④ $\dfrac{e^{-1}}{4}$ | ⑤ $\dfrac{e^{-1}}{2}$ | ⑥ $e^{-1}$ | ⑦ $2e^{-1}$ | ⑧ $4e^{-1}$ |
| ⑨ $\dfrac{e^{-2}}{4}$ | ⓐ $\dfrac{e^{-2}}{2}$ | ⓑ $e^{-2}$ | ⓒ $2e^{-2}$ | ⓓ $4e^{-2}$ |

**解説**

(1) $X$ の期待値は

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{10}{3}$$

となる．分散については公式 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ を用いればよく，

$$E(X^2)=2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{35}{3}$$

であるから，

$$V(X)=\frac{35}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{105-100}{9}=\frac{5}{9}$$

となる．また，$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$ であり，$X$ と $Y$ は独立であるから

$$V(X-Y)=V(X+(-Y))=V(X)+V(Y)$$

である．ここで $E(Y),V(Y)$ については，$E(X),V(X)$ と同様に計算してもよいが，$Y=X-2$ であることを利用すると直ちに

$$E(Y)=E(X-2)=E(X)-2,\quad V(Y)=V(X-2)=V(X)$$

が得られ，$E(X-Y)=2,V(X-Y)=\dfrac{10}{9}$ となる．したがって $\boxed{\mathbf{55}}$ ～ $\boxed{\mathbf{58}}$ の答えは順に ⑥，⑨，②，ⓒ である．

(2) ポアソン分布に従う確率変数の取りうる値は $k=0,1,2,\ldots$ であるから

$$P(X\leqq 1)=P(X=0)+P(X=1)=e^{-1}\frac{1}{0!}+e^{-1}\frac{1}{1!}=2e^{-1}$$

である．したがって $\boxed{\mathbf{59}}$ の答えは ⑦ である．

**問 2**　2 つの事象 $A, B$ に対して，

$$P(A) = \frac{1}{2},\quad P(B) = \frac{1}{3}$$

とする．

(1)　$A \cap B = \emptyset$ のとき，$A$ と $B$ は $\boxed{\textbf{60}}$．

(2)　事象 $B$ が起こったときの事象 $A$ の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．
$P(A|B) = \dfrac{1}{2}$ のとき，$A$ と $B$ は $\boxed{\textbf{61}}$．

**$\boxed{\textbf{60}}$・$\boxed{\textbf{61}}$ の解答群**

⓪　独立である　　　①　従属である（独立ではない）

②　独立であるとも従属であるともいえない

**解説**

2 つの事象の独立性を判定する問題である．2 つの事象 $A, B$ は，$P(A\cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つとき独立であり，そうでないとき従属である．

(1) $A \cap B = \emptyset$ より，$P(A \cap B) = 0$ である．すなわち $P(A \cap B) \neq P(A)P(B) = \dfrac{1}{6}$ であるから，$A$ と $B$ は従属である．したがって $\boxed{\textbf{60}}$ の答えは ① である．

(2) 条件付き確率の定義より，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

となり，$A$ と $B$ は独立である．したがって $\boxed{\textbf{61}}$ の答えは ⓪ である．

**問 3**　数直線上にコマをおき，硬貨を投げて表が出たら正の方向に 1 だけコマを動かし，裏が出たら動かさないものとする．最初にコマを原点におき，硬貨を 3 回投げた後のコマの座標を $X$ とするとき，$X$ が 0 となる確率は $P(X=0)=$ $\boxed{\mathbf{62}}$ であり，$X$ が 2 となる確率は $P(X=2)=$ $\boxed{\mathbf{63}}$ である．また，$X$ の期待値は $E(X)=$ $\boxed{\mathbf{64}}$，$X$ の標準偏差は $D(X)=$ $\boxed{\mathbf{65}}$ である．ただし硬貨を投げたときに表，裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ とする．

**$\boxed{62}$ 〜 $\boxed{65}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $\dfrac{1}{2}$ | ② $\dfrac{3}{2}$ | ③ $\dfrac{5}{2}$ | ④ $\dfrac{1}{4}$ | ⑤ $\dfrac{3}{4}$ |
| ⑥ $\dfrac{5}{4}$ | ⑦ $\dfrac{1}{8}$ | ⑧ $\dfrac{3}{8}$ | ⑨ $\dfrac{5}{8}$ | ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ |
| ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ | ⓓ $\sqrt{3}$ | ⓔ $2\sqrt{3}$ | ⓕ $4\sqrt{3}$ | | |

**解説**

硬貨を 3 回投げた後の座標は 3 回のうち表が出た回数に等しい．これより $X$ が二項分布 $B\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$ に従うことがわかる．したがって，

$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},\quad P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

である．また，二項分布 $B(n,p)$ の期待値は $np$，標準偏差は $\sqrt{np(1-p)}$ であるから，

$$E(X)=\frac{3}{2},\quad D(V)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である．したがって $\boxed{\mathbf{62}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{65}}$ の答えは順に ⑦, ⑧, ②, ⓐ である．

**問 4**　確率変数 $X$ の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

で与えられているものとする．また， $X$ の分布関数を

$$F(x)=P(X \leqq x)$$

とする．このとき，$X$ の期待値は $E(X)=$ $\boxed{\textbf{66}}$ で，

$$F(x)=\begin{cases} \boxed{\textbf{67}} & (x<0) \\ \boxed{\textbf{68}} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

である．

**$\boxed{\textbf{66}}$ の解答群**

⓪ $0$　① $1$　② $2$　③ $3$　④ $4$

⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{1}{4}$

**$\boxed{\textbf{67}}$・$\boxed{\textbf{68}}$ の解答群**

⓪ $0$　① $e^{-2x}$　② $e^{-\frac{1}{2}x}$

③ $\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$　④ $2e^{-2x}$　⑤ $1-e^{-2x}$

⑥ $1-e^{-\frac{1}{2}x}$　⑦ $1-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$　⑧ $1-2e^{-2x}$

**解説**

確率密度関数が $f(x)$ である連続型確率変数 $X$ の期待値は

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

で与えられる．したがって部分積分により

$$E(X)=\int_0^{\infty} x\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx=\frac{1}{2}\left[-2xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x}dx=\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{\infty}=2$$

を得る．また，

$$F(X) = P(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

であるから，$X < 0$ のとき

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0,$$

$x \geqq 0$ のとき

$$F(X) = \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{2} \left[ -2e^{-\frac{1}{2}t} \right]_{0}^{x} = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$$

となる．したがって $\boxed{\textbf{66}}$ 〜 $\boxed{\textbf{68}}$ の答えは順に ②, ⓪, ⑥ である．

**問 5** A 工場では，機械を用いて長さ 10 mm の部品を作っている．この機械で作られる部品の長さは平均 10 mm, 分散 1 $\text{mm}^2$ の正規分布に従っていた．この機械が故障し修理を行った後，故障前と同様に部品の長さの平均が 10 mm であるかどうかを調べることにした．

修理後の機械で作られる部品の長さは， 平均 $\mu$ mm, 分散 1 $\text{mm}^2$ の正規分布に従うものとする．この条件の下， 有意水準 5% として

帰無仮説 $H_0 : \mu = 10$,

対立仮説 $H_1 : \mu \neq 10$

の両側検定を行う．

この機械で作られた部品の中から 16 個を取り出し，それらの長さを $X_1, \ldots, X_{16}$ とすると，標本平均

$$\overline{X} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i$$

は平均 **69** ，分散 **70** の正規分布に従う．したがって帰無仮説 $H_0$ のもとで

$$Z = \frac{\overline{X} - 10}{\sqrt{\boxed{70}}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．実際に 16 個の部品の長さを測定したところ， $\overline{X}$ の実現値 $\overline{x}$ は 10.5 mm であった．このとき， $Z$ の実現値 $z$ は **71** であり， 正規分布表から

$$P\left(|Z| \geqq \boxed{71}\right) \fallingdotseq 0.0456 < 0.05$$

である．したがって帰無仮説は **72** といえる．

**69** **の解答群**

⓪ $0$　① $\mu$　② $2\mu$　③ $4\mu$　④ $10\mu$

⑤ $16\mu$　⑥ $\dfrac{\mu}{2}$　⑦ $\dfrac{\mu}{4}$　⑧ $\dfrac{\mu}{10}$　⑨ $\dfrac{\mu}{16}$

**70** **の解答群**

⓪ $0$　① $1$　② $4$　③ $10$　④ $16$

⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{4}$　⑦ $\dfrac{1}{10}$　⑧ $\dfrac{1}{16}$　⑨ $\dfrac{5}{8}$

$\boxed{\mathbf{71}}$ **の解答群**

⓪ 0.0　① 0.5　② 1.0　③ 2.0　④ 10.0　⑤ 10.5

$\boxed{\mathbf{72}}$ **の解答群**

⓪ 棄却されず，故障前と長さが同じではない

① 棄却されず，故障前と長さが同じである

② 棄却され，故障前と長さが同じではない

③ 棄却され，故障前と長さが同じである

**解説**

16 個の部品の長さは互いに独立とみなせるから，標本平均 $\overline{X}$ は正規分布に従い，その平均は期待値の線形性より

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i\right) = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} E(X_i) = \mu$$

である．また，確率変数の独立性から分散も和で表され，

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{16^2}\sum_{i=1}^{16} V(X_i) = \frac{1}{16}$$

となる．

両側検定では $P(|Z| \geqq z) < 0.05$ であるとき，有意水準 5% で帰無仮説を棄却する．この観測値に基づく $Z$ の実現値 $z$ は

$$z = \frac{\overline{x} - 10}{\sqrt{1/16}}$$

より，

$$z = \frac{10.5 - 10}{1/4} = 0.5 \times 4 = 2.0$$

であり，$P(|Z| \geqq 2.0) \fallingdotseq 0.0456$ であるから，帰無仮説は棄却され，故障前と長さが同じではないといえる．

したがって $\boxed{\mathbf{69}}$ ～ $\boxed{\mathbf{72}}$ の答えは順に ①, ⑧, ③, ② である．