# EMaT

# 工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

## 2017年12月9日（土）

**4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分**

**3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分**

**2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分**

**1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分**

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

## 受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(5) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．
(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(8) 問題冊子は持ち帰ること．
(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(10) その他，監督者の指示に従うこと．

# 解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

| 23 | ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ |
|---|---|

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ には $\boxed{\textbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\textbf{23}}$ は $(\boxed{\textbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合， $x^2 - \boxed{\textbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は $x$ の自然対数とする．

# 目次

# 第１分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 6 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする.

**問１**　次の 2 つの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-(x+1)}{x-2} = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{x} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $2$ | ③ $\dfrac{1}{2}$ | ④ $\dfrac{3}{4}$ | ⑤ $\dfrac{5}{6}$ |
| ⑥ $\infty$ | ⑦ $-1$ | ⑧ $-2$ | ⑨ $-\dfrac{1}{2}$ | ⓐ $-\dfrac{3}{4}$ | ⓑ $-\dfrac{5}{6}$ |
| ⓒ $-\infty$ | | | | | |

計算用紙

**問 2**　不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}\,dx$ を計算する．

$\tan x = t$ とおいて，その両辺を $t$ で微分すれば， $\boxed{\;\mathbf{3}\;}\ \dfrac{dx}{dt} = 1$ を得る．関係式

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$$

を用いれば

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{\;\mathbf{4}\;}, \qquad 1 + \cos^2 x = \boxed{\;\mathbf{5}\;}$$

となる．よって，$t$ についての積分に変換することができて

$$I = \boxed{\;\mathbf{6}\;} \qquad \text{(積分定数は省略)}$$

を得る．

**$\boxed{\;3\;}$ の解答群**

⓪ $0$　① $1$　② $\tan x$　③ $\dfrac{1}{\tan^2 x}$

④ $\cos^{-1} x$　⑤ $\cos^2 x$　⑥ $\dfrac{1}{\cos x}$　⑦ $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

**$\boxed{\;4\;}$・$\boxed{\;5\;}$ の解答群**

⓪ $t$　① $1+t$　② $\dfrac{1}{1+t^2}$　③ $\sqrt{1+t^2}$

④ $\dfrac{2}{1+t^2}$　⑤ $\dfrac{2+t^2}{1+t^2}$　⑥ $\dfrac{1}{t}$　⑦ $\dfrac{t^2}{2+t^2}$

**$\boxed{\;6\;}$ の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{2}x$　① $\dfrac{1}{2}\tan^{-1} x$　② $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\log(1+\tan^2 x)$

③ $\dfrac{1}{2}\tan^2 x$　④ $\dfrac{1}{1+x^2}$　⑤ $\dfrac{1}{2}\log(1+\tan^2 x)$

⑥ $\dfrac{1}{2}\log(2+x^2)$　⑦ $\dfrac{1}{2}\log(2+\tan^2 x)$

計算用紙

**問 3**　双曲線関数 $\sinh x$, $\cosh x$ は $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ により定義される.

(1)　$\dfrac{d}{dx}\sinh x = \boxed{\mathbf{7}}$ である.

$\boxed{\mathbf{7}}$ **の解答群**

⓪ $\cos^{-1} x$　① $\sinh x$　② $-\sinh x$　③ $\cosh x + \sinh x$

④ $\sin^{-1} x$　⑤ $\cosh x$　⑥ $-\cosh x$　⑦ $\cosh x - \sinh x$

(2)　$\sinh x$ の逆関数を $y = \sinh^{-1} x$ と表すとき，$x = \sinh y$ なので

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

となる．ここで，$t = e^y$ とおくと，$t$ についての 2 次方程式 $t^2 - 2xt - 1 = 0$ を得る．$t > 0$ であることに注意してこれを解くと，$t = \boxed{\mathbf{8}}$ である．よって，$y = \boxed{\mathbf{9}}$ を得る.

$\boxed{\mathbf{8}}$ ・ $\boxed{\mathbf{9}}$ **の解答群**

⓪ $1 + \sqrt{x^2+1}$　① $\log(1 + \sqrt{x^2+1})$　② $e^{1+\sqrt{x^2+1}}$

③ $x + \sqrt{x^2+1}$　④ $\log(x + \sqrt{x^2+1})$　⑤ $e^{x+\sqrt{x^2+1}}$

(3)　(2) より

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{d}{dx}\boxed{\mathbf{9}} = \boxed{\mathbf{10}}$$

である.

$\boxed{\mathbf{10}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{x}{x^2+1+\sqrt{x^2+1}}$　① $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　② $1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

③ $\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} e^{x+\sqrt{x^2+1}}$　④ $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$　⑤ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

計算用紙

**問 4**　関数 $\dfrac{1}{1-t}$ のマクローリン展開（$t=0$ を中心とするテイラー展開）は

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots \qquad (-1<t<1)$$

である．このことから $\dfrac{1}{1+x^2}$ のマクローリン展開は

$$\frac{1}{1+x^2}=\boxed{\mathbf{11}} \qquad (-1<x<1)$$

である．また，$\tan^{-1}x=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+s^2}\,ds$ を用いれば

$$\tan^{-1}x=\boxed{\mathbf{12}} \qquad (-1<x<1)$$

となり，$\tan^{-1}x$ のマクローリン展開を得る．

$\boxed{\mathbf{11}}$ **の解答群**

⓪ $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$　① $1-x^2-x^4-x^6-x^8-\cdots$

② $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$　③ $1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$

④ $1+x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$　⑤ $1-x^3+x^5-x^7+x^9-\cdots$

⑥ $1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots$　⑦ $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\cdots$

$\boxed{\mathbf{12}}$ **の解答群**

⓪ $x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$　① $x-2x^3+4x^5-6x^7+\cdots$

② $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$　③ $x-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}-\cdots$

④ $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots$　⑤ $3x+6x^2+12x^3+24x^4+\cdots$

⑥ $x+3x^3+5x^5+7x^7+\cdots$　⑦ $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\cdots$

計算用紙

**問 5**　1 変数関数 $f(x)$, $g(x)$ は微分可能で，その導関数 $f'(x)$, $g'(x)$ は連続であるとする．また，2 変数関数 $h(t,s)$ は偏微分可能で，$\dfrac{\partial h}{\partial t}(t,s)$, $\dfrac{\partial h}{\partial s}(t,s)$ はともに連続であるとする．このとき，合成関数 $z=f(h(t,s))$ の $t$ に関する偏導関数は

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \boxed{\mathbf{13}}$$

である．また，合成関数 $w=h(f(x),g(x))$ の導関数は

$$\frac{dw}{dx} = \boxed{\mathbf{14}}$$

である．

**$\boxed{\mathbf{13}}$ ・ $\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群**

⓪ $f'(0)\dfrac{\partial h}{\partial t}(t,s)$　　① $f'(0)\dfrac{\partial h}{\partial s}(t,s)$

② $f'(h(t,s))\dfrac{\partial h}{\partial t}(t,s)$　　③ $\dfrac{\partial h}{\partial t}(f(x),g(x))f'(x)$

④ $f'(h(t,s))\dfrac{\partial h}{\partial s}(t,s)$　　⑤ $\dfrac{\partial h}{\partial s}(f(x),g(x))(f'(x)+g'(x))$

⑥ $\dfrac{\partial h}{\partial t}(f(x),g(x))(f'(x)+g'(x))$　　⑦ $\dfrac{\partial h}{\partial s}(f(x),g(x))g'(x)$

⑧ $\dfrac{\partial h}{\partial t}(f(x),g(x))(f'(x)+g'(x)) + \dfrac{\partial h}{\partial s}(f(x),g(x))(f'(x)+g'(x))$

⑨ $\dfrac{\partial h}{\partial t}(f(x),g(x))f'(x) + \dfrac{\partial h}{\partial s}(f(x),g(x))g'(x)$

ⓐ $\dfrac{\partial h}{\partial t}(f(x),g(x))f'(0) + \dfrac{\partial h}{\partial s}(f(x),g(x))g'(0)$

計算用紙

**問 6** $xy$ 平面上の集合 $D$ が

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \frac{1}{2} \leqq y \leqq 1,\ \ 0 \leqq x \leqq y \right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D \frac{y^3}{x^2 + y^2}\, dxdy$$

の値を求める．

(1) $I$ は

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left( \int_0^{\boxed{\mathbf{15}}} \frac{y^3}{x^2 + y^2}\, dx \right) dy$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{15}}$ **の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $\dfrac{1}{2}$ | ① $1$ | ② $y - x$ | ③ $y$ |
| ④ $\dfrac{x}{y}$ | ⑤ $x$ | ⑥ $x - y$ | ⑦ $1 - y$ |

(2) $I_1(y) = \displaystyle\int_0^{\boxed{\mathbf{15}}} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dx$ とおくと，$I_1(y) = \dfrac{\boxed{\mathbf{16}}}{y}$ である．

$\boxed{\mathbf{16}}$ **の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $\dfrac{1}{4}$ | ① $\pi$ | ② $\dfrac{\pi}{4}$ | ③ $1 - \dfrac{\pi}{4}$ |
| ④ $\dfrac{\log 2}{2}$ | ⑤ $2\pi$ | ⑥ $\dfrac{\pi}{2}$ | ⑦ $\dfrac{\pi}{2} - 1$ |

(3) (1), (2) より

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} y^3 I_1(y)\, dy = \boxed{\mathbf{17}}$$

を得る.

$\boxed{\mathbf{17}}$ **の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $1$ | ① $-\dfrac{7}{24}$ | ② $\dfrac{7\pi}{12}$ | ③ $\dfrac{7\log 2}{48}$ |
| ④ $\dfrac{\pi}{12}$ | ⑤ $\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\dfrac{7}{24}$ | ⑥ $\dfrac{7\pi}{96}$ | ⑦ $\dfrac{\log 2}{3}$ |
| ⑧ $\dfrac{7\pi}{48}$ | ⑨ $\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)\dfrac{7}{24}$ | ⓐ $\dfrac{7}{96}$ | |

# 第２分野　線形代数

〔 問１〜問５ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{18}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{34}}$ 〕

**問１**　座標空間内に点 A$(1,1,1)$, 点 B$(5,2,-1)$, 点 C$(1,2,1)$, 点 D$(5,5,2)$ がある.

(1)　ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{\mathbf{18}} \\ 4 \end{pmatrix}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のどちらにも直交する.

(2)　線分 AB, AC, AD を３辺とする平行六面体の体積は $\boxed{\mathbf{19}}$ である.

$\boxed{\mathbf{18}}$ ・ $\boxed{\mathbf{19}}$ **の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ 0 | ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ 5 |
| | ⑥ 6 | ⑦ 7 | ⑧ 8 | ⑨ 9 | ⓐ 10 |
| | ⓑ 11 | ⓒ 12 | ⓓ 13 | ⓔ 14 | ⓕ 15 |

計算用紙

**問 2**　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x - y - 3z = 2 \\ -x + 2y + 4z = -4 \\ 3x - 2y - 8z = a \end{cases}$$

について考える．ただし，$a$ は定数とする．

(1)　$a = \boxed{\textbf{20}}$ のとき，連立方程式 $(*)$ は解をもつ．

(2)　$a = \boxed{\textbf{20}}$ のとき，$x = 2$ とすると，$y = \boxed{\textbf{21}}$, $z = \boxed{\textbf{22}}$ である．

**$\boxed{\textbf{20}}$ 〜 $\boxed{\textbf{22}}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ 0 | ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ 5 |
| | ⑥ 6 | ⑦ 7 | ⑧ 8 | ⑨ −1 | ⓐ −2 |
| | ⓑ −3 | ⓒ −4 | ⓓ −5 | ⓔ −6 | ⓕ −7 |

計算用紙

**問 3** $a, b, c$ を定数とする．行列式

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

の値は $\boxed{\mathbf{23}}\,(a+b+c)^{\boxed{\mathbf{24}}}$ である．

**$\boxed{23}$ ・ $\boxed{24}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ 0 | ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ 5 |
| | ⑥ 6 | ⑦ 7 | ⑧ 8 | ⑨ −1 | ⓐ −2 |
| | ⓑ −3 | ⓒ −4 | ⓓ −5 | ⓔ −6 | ⓕ −7 |

計算用紙

**問 4**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ の対角化を考える．

まず，$A$ の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-x & -2 & 2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ -1 & -2 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)(\boxed{\mathbf{25}}-x) = 0$$

である．したがって，$A$ の固有値は 1 と 2 と $\boxed{\mathbf{25}}$ である．

固有値 1 に対する固有ベクトルを求めると $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{\mathbf{26}} \end{pmatrix}$ である．ただし，$c_1$ は 0 でない任意定数である．同様に，固有値 2, 固有値 $\boxed{\mathbf{25}}$ に対する固有ベクトルをそれぞれ求めると

$$c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \boxed{\mathbf{27}} \end{pmatrix}, \quad c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\mathbf{28}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．ただし，$c_2, c_3$ は 0 でない任意定数である．
したがって，$A$ を対角化する正則行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{\mathbf{28}} \\ \boxed{\mathbf{26}} & \boxed{\mathbf{27}} & 1 \end{pmatrix}$$

である．実際

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{25}} \end{pmatrix}$$

と確かめられる．

**$\boxed{25}$ 〜 $\boxed{28}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ 0 | ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ 5 |
| | ⑥ 6 | ⑦ 7 | ⑧ 8 | ⑨ $-1$ | ⓐ $-2$ |
| | ⓑ $-3$ | ⓒ $-4$ | ⓓ $-5$ | ⓔ $-6$ | ⓕ $-7$ |

計算用紙

**問 5**　$a$ を 0 でない定数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ とする．3 以上の任意の自然数 $n$ に対して，$A^n$ を求める．

$$S = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$A = S + T$ で，$ST = TS$ を満たす．したがって，二項展開ができて

$$A^n = (S+T)^n = S^n + \boxed{\mathbf{29}}\, S^{n-1}T + \boxed{\mathbf{30}}\, S^{n-2}T^2 + \cdots + T^n$$

となる．さらに

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{\mathbf{31}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に注意すると

$$A^n = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{32}} & \boxed{\mathbf{33}} & \boxed{\mathbf{34}} \\ 0 & \boxed{\mathbf{32}} & \boxed{\mathbf{33}} \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{32}} \end{pmatrix}$$

となる．

**$\boxed{\mathbf{29}}$ ～ $\boxed{\mathbf{31}}$ の解答群**

⓪ $0$　① $1$　② $2$　③ $n$

④ $n+1$　⑤ $\dfrac{n-1}{2}$　⑥ $\dfrac{n(n-1)}{2}$　⑦ $\dfrac{n(n+1)}{2}$

**$\boxed{\mathbf{32}}$ ～ $\boxed{\mathbf{34}}$ の解答群**

⓪ $a^{n-1}$　① $a^n$　② $a^{n+1}$

③ $(n-1)a^n$　④ $na^{n-1}$　⑤ $(n+1)a^{n-1}$

⑥ $\dfrac{n(n-1)a^{n+1}}{2}$　⑦ $\dfrac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$　⑧ $\dfrac{n(n+1)a^{n-1}}{2}$

計算用紙

# 第３分野　常微分方程式

〔 問１〜問５ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{35}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{51}}$ 〕

(注意)　各問における $y$ は $x$ の関数であり，$y', y''$ は $y$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．

**問１**　微分方程式

$$y' = -\frac{2}{y}$$

の一般解は

$$y^2 = \boxed{\mathbf{35}} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と表される．特に，$y(1) = 0$ ならば $C = \boxed{\mathbf{36}}$ である．

**$\boxed{\mathbf{35}}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ $x$ | ① $-x$ | ② $2x$ | ③ $-2x$ | ④ $4x$ | ⑤ $-4x$ |
| ⑥ $x^2$ | ⑦ $-x^2$ | ⑧ $2x^2$ | ⑨ $-2x^2$ | ⓐ $4x^2$ | ⓑ $-4x^2$ |
| ⓒ $\dfrac{1}{x}$ | ⓓ $-\dfrac{1}{x}$ | ⓔ $\dfrac{1}{x^2}$ | ⓕ $-\dfrac{1}{x^2}$ | | |

**$\boxed{\mathbf{36}}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $2$ | ③ $3$ | ④ $4$ | ⑤ $5$ |
| ⑥ $-1$ | ⑦ $-2$ | ⑧ $-3$ | ⑨ $-4$ | ⓐ $-5$ | |

計算用紙

**問 2**　微分方程式

$$\text{(a)} \qquad x^2 + y^2 = 2xyy'$$

について考える．

(1)　$y = x \cdot u(x)$ を (a) に代入すると，$u(x)$ に関する微分方程式

$$\text{(b)} \qquad u' = \boxed{\mathbf{37}}$$

が導かれる．

$\boxed{\mathbf{37}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1+u^2}{2u}$　① $\dfrac{1+u^2}{2xu}$　② $\dfrac{1+3u^2}{2u}$　③ $\dfrac{1+3u^2}{2xu}$

④ $\dfrac{1-u^2}{2u}$　⑤ $\dfrac{1-u^2}{2xu}$　⑥ $\dfrac{u^3}{2(1+u^2)}$　⑦ $\dfrac{u^3}{2(1-u^2)}$

(2)　(b) の一般解は

$$\text{(c)} \qquad \boxed{\mathbf{38}} = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{38}}$ **の解答群**

⓪ $x(1+u^2)$　① $\dfrac{1+u^2}{x}$　② $\dfrac{1+u^2}{e^x}$　③ $x^3(1+3u^2)$

④ $x(1-u^2)$　⑤ $\dfrac{1-u^2}{x}$　⑥ $\dfrac{1-u^2}{e^x}$　⑦ $x^3(1-3u^2)$

(3)　(c) に $u = \dfrac{y}{x}$ を代入すれば，(a) の一般解が導かれる．それは，$C \neq 0$ ならば，$xy$ 平面上の $\boxed{\mathbf{39}}$ を表す．

$\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ 直線　① 円　② だ円　③ 双曲線　④ 放物線

⑤ サイクロイド

計算用紙

**問 3**　$xy$ 平面において，曲線 $K$ 上の点 $\mathrm{P}\big(t,\, f(t)\big)$ における接線が点 $\mathrm{A}\big(0,\, 2t\{f(t)\}^2\big)$ を通る．このときの $f(t)$ を次のように求める．ただし，$t>0$ とし，$f(t)$ は定数関数 0 でないものとする．

(1)　点 P における接線の方程式は

$$y = f'(t)\,x + \boxed{\mathbf{40}}$$

である．ただし，$f'(t)$ は $\dfrac{df}{dt}$ を表す．

$\boxed{\mathbf{40}}$ **の解答群**

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $t$ | ② $f(t)$ |
| ③ $tf(t)$ | ④ $\dfrac{f(t)}{t}$ | ⑤ $f'(t)$ |
| ⑥ $tf'(t)$ | ⑦ $\dfrac{f'(t)}{t}$ | ⑧ $f(t)-tf'(t)$ |
| ⑨ $f'(t)-tf(t)$ | ⓐ $f(t)-\dfrac{f'(t)}{t}$ | ⓑ $f'(t)-\dfrac{f(t)}{t}$ |

(2)　(1) で求めた接線が点 A を通るので，$\boxed{\mathbf{40}} = 2t\{f(t)\}^2$ が成り立つ．ここで，$z = \dfrac{1}{f(t)}$ とおくと，線形微分方程式

$$\frac{dz}{dt} + \boxed{\mathbf{41}}\,z = \boxed{\mathbf{42}}$$

が導かれる．

$\boxed{\mathbf{41}}$ ・ $\boxed{\mathbf{42}}$ **の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $2$ | ③ $-1$ | ④ $-2$ |
| ⑤ $t$ | ⑥ $-t$ | ⑦ $t^2$ | ⑧ $-t^2$ | ⑨ $\dfrac{1}{t}$ |
| ⓐ $-\dfrac{1}{t}$ | ⓑ $\dfrac{1}{t^2}$ | ⓒ $-\dfrac{1}{t^2}$ | ⓓ $\sqrt{t}$ | ⓔ $-\sqrt{t}$ |

(3)　(2) の線形微分方程式の一般解 $z$ を求めれば，それから

$$f(t) = \frac{1}{z} = \boxed{\textbf{43}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

を得る．

$\boxed{\textbf{43}}$ **の解答群**

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $\dfrac{1}{t+C}$ | ① $\dfrac{t}{C}$ | ② $\dfrac{C}{t}$ |
| ③ $\dfrac{1}{t^2+C}$ | ④ $\dfrac{1}{t^2+Ct}$ | ⑤ $\dfrac{1}{t^2+t+C}$ |
| ⑥ $\dfrac{t}{t^2+C}$ | ⑦ $\dfrac{1}{t^3+Ct}$ | ⑧ $\dfrac{1}{t^3+Ct^2}$ |
| ⑨ $\dfrac{1}{t}+\dfrac{t}{C}$ | ⓐ $\dfrac{1}{2t\log t+Ct}$ | ⓑ $\dfrac{1}{-2t\log t+Ct}$ |

**問 4**　定数 $a$ を含む微分方程式

$$y'' + ay = 0$$

および条件

$$y'(0) = y'(1) = 0 \quad \text{かつ} \quad y(0) > 0$$

を満たす関数 $y$ について考える．

(1)　$a = \boxed{\mathbf{44}}$ のとき，$y$ は正の定数関数である．

(2)　$a$ が $\boxed{\mathbf{44}} < a < \boxed{\mathbf{45}}$ を満たすとき，$y$ は存在せず，$a = \boxed{\mathbf{45}}$ のとき，$y$ は正の定数 $A$ を用いて $y = A\cos \boxed{\mathbf{46}}\, x$ と表される．

**$\boxed{44}$ ～ $\boxed{46}$ の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $2$ | ③ $\pi$ | ④ $\dfrac{\pi}{2}$ |
| ⑤ $\dfrac{\pi}{4}$ | ⑥ $\pi^2$ | ⑦ $2\pi^2$ | ⑧ $\dfrac{\pi^2}{2}$ | ⑨ $\dfrac{\pi^2}{4}$ |
| ⓐ $\sqrt{\pi}$ | ⓑ $2\sqrt{\pi}$ | ⓒ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ | ⓓ $\sqrt{2\pi}$ | ⓔ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ |

計算用紙

**問 5**　$k > 2$ である定数 $k$ を含む微分方程式

$$y'' + 2ky' + 4y = e^{-4x}$$

の一般解は次の通りである．ただし，$C_1, C_2$ は任意定数を表す．

(1)　$k \neq \boxed{\textbf{47}}$ のとき

$$y = e^{-kx}\left(C_1\, e^{\boxed{\textbf{48}}\,x} + C_2\, e^{-\boxed{\textbf{48}}\,x}\right) + \frac{1}{\boxed{\textbf{49}}}\, e^{-4x}$$

**$\boxed{47}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ 3 | ① 4 | ② 5 | ③ 6 | ④ 8 | ⑤ 10 |
| ⑥ $\frac{5}{2}$ | ⑦ $\frac{7}{2}$ | ⑧ $\frac{9}{2}$ | ⑨ $\frac{9}{4}$ | ⓐ $\frac{11}{4}$ | ⓑ $\frac{13}{4}$ |

**$\boxed{48}$ ・ $\boxed{49}$ の解答群**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $k$ | ① $\frac{k}{2}$ | ② $k^2$ | ③ $\sqrt{k}$ |
| ④ $\sqrt{k^2-4}$ | ⑤ $\sqrt{4-k^2}$ | ⑥ $\sqrt{k^2-16}$ | ⑦ $\sqrt{16-k^2}$ |
| ⑧ $2k+20$ | ⑨ $-2k+20$ | ⓐ $2k-12$ | ⓑ $-2k-12$ |
| ⓒ $8k+20$ | ⓓ $-8k+20$ | ⓔ $8k-12$ | ⓕ $-8k-12$ |

(2)　$k = \boxed{\textbf{47}}$ のとき

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{\boxed{\textbf{50}}\,x} + \boxed{\textbf{51}}\, xe^{-4x}$$

**$\boxed{50}$ ・ $\boxed{51}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ 0 | ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ $\frac{1}{2}$ | ⑤ $\frac{1}{3}$ |
| ⑥ $\frac{2}{3}$ | ⑦ $\frac{1}{4}$ | ⑧ $\frac{3}{4}$ | ⑨ $-1$ | ⓐ $-2$ | ⓑ $-3$ |
| ⓒ $-\frac{1}{2}$ | ⓓ $-\frac{1}{3}$ | ⓔ $-\frac{2}{3}$ | ⓕ $-\frac{1}{4}$ | ⓖ $-\frac{3}{4}$ | |

計算用紙

# 第4分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{52}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{70}}$ 〕

(注意) 事象 $A$ に対し，$P(A)$ は $A$ の起こる確率を表す．また，事象 $A$ が起こったときの事象 $B$ の起こる条件付き確率を $P(B\,|\,A)$ で表す．確率変数 $X$ に対し，$E(X), V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

**問 1**　確率変数 $X, Y$ の確率分布がそれぞれ

| $X$ の値 | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{1}{6}$ | $a$ | $b$ |

| $Y$ の値 | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{1}{2}$ | $c$ | $d$ |

（$a, b, c, d$ は定数）

で与えられていて，$E(X+Y)=0$ および $E(X-Y)=\dfrac{2}{3}$ が成り立つ．このとき

$$E(X) = \boxed{\mathbf{52}}, \quad V(X) = \boxed{\mathbf{53}}, \quad c = \boxed{\mathbf{54}}$$

である．

**$\boxed{\mathbf{52}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{54}}$ の解答群**

⓪ $0$　① $1$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{1}{4}$　⑥ $\frac{3}{4}$　⑦ $\frac{1}{6}$　⑧ $\frac{5}{6}$　⑨ $\frac{1}{9}$

ⓐ $\frac{2}{9}$　ⓑ $\frac{4}{9}$　ⓒ $\frac{5}{9}$　ⓓ $\frac{7}{9}$　ⓔ $\frac{8}{9}$

計算用紙

**問 2**　ひよこの性別を判定する機器が開発された．これは，メスの 96% を正しくメスと判定する一方，オスの 6% を誤ってメスと判定してしまう．いま，オスとメスが混在したひよこの集団から無作為に選んだ 1 匹が機器によりメスと判定された．このとき，そのひよこが本当にメスである確率を求めたい．
そこで，選んだひよこがメスである事象を $A$, オスである事象を $B$ で表す．ただし，$P(A) = P(B) = \dfrac{1}{2}$ とする．また，選んだひよこが機器によりメスと判定される事象を $C$ とする．

(1)　$P(A \cap C) = \boxed{\mathbf{55}}$ , $P(B \cap C) = \boxed{\mathbf{56}}$ であるから，$P(C) = \boxed{\mathbf{55}} + \boxed{\mathbf{56}}$ である．

(2)　求めたい確率は条件付き確率 $P(A\,|\,C)$ であり，その値は $\boxed{\mathbf{57}}$ である．

**$\boxed{\mathbf{55}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{57}}$ の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ $\dfrac{1}{2}$ | ① $\dfrac{2}{3}$ | ② $\dfrac{3}{5}$ | ③ $\dfrac{4}{5}$ | ④ $\dfrac{15}{17}$ |
| ⑤ $\dfrac{16}{17}$ | ⑥ $\dfrac{6}{25}$ | ⑦ $\dfrac{12}{25}$ | ⑧ $\dfrac{24}{25}$ | ⑨ $\dfrac{3}{50}$ |
| ⓐ $\dfrac{47}{50}$ | ⓑ $\dfrac{2}{100}$ | ⓒ $\dfrac{3}{100}$ | ⓓ $\dfrac{47}{100}$ | ⓔ $\dfrac{49}{100}$ |

計算用紙

**問 3**　赤玉と白玉が $1:1$ の比率で入っている袋から無作為に玉を1個取り出し，色を確認してから袋に戻す試行を独立に5回行う．5回のうち，赤玉が出た回数を確率変数 $X$ とし，確率変数 $Y$ を $Y=2X-5$ で与える．

(1)　$X$ は二項分布 $B\left(5, \dfrac{1}{2}\right)$ に従い，$V(X)=$ $\boxed{\textbf{58}}$ である．$V(Y)$ は $V(X)$ の $\boxed{\textbf{59}}$ 倍である．

**$\boxed{58}$・$\boxed{59}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $2$ | ③ $3$ | ④ $4$ | ⑤ $5$ |
| ⑥ $10$ | ⑦ $20$ | ⑧ $\dfrac{1}{2}$ | ⑨ $\dfrac{5}{2}$ | ⓐ $\dfrac{1}{4}$ | ⓑ $\dfrac{5}{4}$ |

(2)　確率変数 $X$ と $Y$ は $\boxed{\textbf{60}}$．実際

$$P(Y=1)=\boxed{\textbf{61}},\quad P(Y=1\mid 3\leqq X\leqq 5)=\boxed{\textbf{62}}$$

である．

(3)　$3\leqq X\leqq 5$ となる事象と $|Y|=1$ となる事象は $\boxed{\textbf{63}}$．実際

$$P(|Y|=1)=\boxed{\textbf{61}}\times 2,\quad P(|Y|=1\mid 3\leqq X\leqq 5)=\boxed{\textbf{62}}$$

である．

**$\boxed{60}$・$\boxed{63}$ の解答群**

⓪ 独立である　　① 従属である（独立でない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

$\boxed{\mathbf{61}}$ ・ $\boxed{\mathbf{62}}$ **の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $\frac{1}{2}$ | ③ $\frac{1}{4}$ | ④ $\frac{3}{4}$ | ⑤ $\frac{1}{8}$ |
| ⑥ $\frac{3}{8}$ | ⑦ $\frac{5}{8}$ | ⑧ $\frac{7}{8}$ | ⑨ $\frac{1}{16}$ | ⓐ $\frac{3}{16}$ | ⓑ $\frac{5}{16}$ |
| ⓒ $\frac{7}{16}$ | ⓓ $\frac{9}{16}$ | ⓔ $\frac{15}{16}$ | ⓕ $\frac{1}{32}$ | ⓖ $\frac{5}{32}$ | ⓗ $\frac{15}{32}$ |

**問 4**　$a, b$ を正の定数とする．確率変数 $X$ の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} b - a|x| & \left(|x| \leqq \dfrac{b}{a}\right) \\ 0 & \left(|x| > \dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$$

で与えられている．このとき，$b$ は $a$ を用いて $b = \boxed{\mathbf{64}}$ と表され，$E(X) = \boxed{\mathbf{65}}$ である．さらに，$V(X) = 1$ とすると，$a = \boxed{\mathbf{66}}$ となる．

**$\boxed{\mathbf{64}}$・$\boxed{\mathbf{65}}$ の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $2$ | ③ $a$ | ④ $2a$ |
| ⑤ $a^2$ | ⑥ $2a^2$ | ⑦ $\sqrt{a}$ | ⑧ $\sqrt{2a}$ | ⑨ $\dfrac{1}{a}$ |
| ⓐ $\dfrac{1}{2a}$ | ⓑ $\dfrac{1}{a^2}$ | ⓒ $\dfrac{1}{2a^2}$ | ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ | ⓔ $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ |

**$\boxed{\mathbf{66}}$ の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $1$ | ② $2$ | ③ $3$ | ④ $4$ | ⑤ $\dfrac{1}{2}$ |
| ⑥ $\dfrac{1}{3}$ | ⑦ $\dfrac{2}{3}$ | ⑧ $\dfrac{1}{4}$ | ⑨ $\dfrac{3}{4}$ | ⓐ $\dfrac{1}{6}$ | ⓑ $\dfrac{5}{6}$ |

計算用紙

**問 5**　U 市にはたくさんのコイが泳いでいる大きな沼がある．先日，そこでコイを 100 匹捕まえ，1 匹ずつ重さをはかる調査が行われた．その結果，測定値の平均は 1151 g であった．沼のすべてのコイについて，重さの平均を $\mu$ g とするとき，測定結果を用いて $\mu$ の信頼度 95% での信頼区間を求めたい．なお，コイ個々の重さは正規分布に従い，その標準偏差は 75 g であることがわかっている．

まず，$n$ 匹目 $(n = 1, 2, \ldots, 100)$ に捕まえたコイの重さを確率変数 $X_n$ とする．これら 100 個の確率変数は互いに独立で，それぞれ正規分布 $N(\mu, 75^2)$ に従う．したがって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は正規分布 $N\left(\mu,\ \boxed{\mathbf{67}}\right)$ に従う．そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\mathbf{68}}}$$

とおけば，$Z$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表によれば

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかるので

$$P\left(\overline{X} - \boxed{\mathbf{69}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \boxed{\mathbf{69}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

が成り立つ．したがって

$$\left[\overline{x} - \boxed{\mathbf{69}},\ \overline{x} + \boxed{\mathbf{69}}\right]$$

に $\overline{x} = 1151$ を代入したものが求める信頼区間である．なお，この信頼区間の幅は，捕まえるコイの数 100 を $\boxed{\mathbf{70}}$ 倍にすると半分になる．

**$\boxed{\mathbf{67}}$ ・ $\boxed{\mathbf{68}}$ の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ 0.75 | ① 7.5 | ② 75 | ③ 750 | ④ 7500 |
| ⑤ $0.75^2$ | ⑥ $7.5^2$ | ⑦ $75^2$ | ⑧ $750^2$ | ⑨ $7500^2$ |
| ⓐ $\sqrt{0.75}$ | ⓑ $\sqrt{7.5}$ | ⓒ $\sqrt{75}$ | ⓓ $\sqrt{750}$ | ⓔ $\sqrt{7500}$ |

$\boxed{\mathbf{69}}$ **の解答群**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ 0.0110 | ① 0.110 | ② 1.10 | ③ 11.0 | ④ 110 |
| ⑤ 0.0147 | ⑥ 0.147 | ⑦ 1.47 | ⑧ 14.7 | ⑨ 147 |
| ⓐ 0.0196 | ⓑ 0.196 | ⓒ 1.96 | ⓓ 19.6 | ⓔ 196 |

$\boxed{\mathbf{70}}$ **の解答群**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ 25 | ① 20 | ② 10 | ③ 5 | ④ 4 | ⑤ 2 |
| ⑥ $\frac{1}{25}$ | ⑦ $\frac{1}{20}$ | ⑧ $\frac{1}{10}$ | ⑨ $\frac{1}{5}$ | ⓐ $\frac{1}{4}$ | ⓑ $\frac{1}{2}$ |