

EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2007年12月15日(土)

4 分野受験 午後1時30分～午後4時10分

3 分野受験 午後1時30分～午後3時30分

2 分野受験 午後1時30分～午後2時50分

1 分野受験 午後1時30分～午後2時10分

* 受験分野は、各大学の指示に従ってください。

受験上の注意

- (1) 机の右上に学生証を提示すること。
- (2) この問題冊子は袋綴じになっている。試験開始の合図後に右側のミシン目に沿って開封すること。
- (3) 表紙裏の解答上の注意を読むこと。
- (4) 問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等がある場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- (5) マークにはHBまたはBの鉛筆(またはシャープペンシル)を使用すること。
- (6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること。
- (7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離さないこと。
- (8) 試験開始40分後から退席を認める。
- (9) 問題冊子は持ち帰ること。
- (10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること。
- (11) その他、監督者の指示に従うこと。

解答上の注意

- (1) 解答として最も相応しいものを指定された解答群から選んで解答用紙にマークすること。ただし、解答群に相応しいものが見つからない場合には \textcircled{i} をマークすること。例えば、 $\boxed{23}$ と表示してある問いに対して \textcircled{c} と解答する場合は、次のようにマークすること。

23	$\textcircled{0}$	$\textcircled{1}$	$\textcircled{2}$	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	$\textcircled{6}$	$\textcircled{7}$	$\textcircled{8}$	$\textcircled{9}$	\textcircled{a}	\textcircled{b}	\textcircled{d}	\textcircled{e}	\textcircled{f}	\textcircled{g}	\textcircled{h}	\textcircled{i}
----	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

- (2) \mathbb{R} は実数全体の集合とする。
(3) $\log x$ は x の自然対数とする。

目次

第1分野 微分積分	3
第2分野 線形代数	11
第3分野 常微分方程式	19
第4分野 確率・統計	25

第1分野 微分積分

[問 1 ~ 問 6 : 解答番号 ~]

問 1 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^2} =$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2} =$.

, の解答群

- ① $-\infty$ ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$ ⑥ $-\frac{1}{3}$ ⑦ 0
 ⑧ $\frac{1}{3}$ ⑨ $\frac{1}{2}$ ⑩ 1 ⑪ 2 ⑫ 3 ⑬ ∞

問 2 k, m は正の整数とする. このとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(k-m)x - \cos(k+m)x\} \, dx$$

$$= \begin{cases} \text{③} & (\text{④ のとき}) \\ 0 & (\text{④ でないとき}) \end{cases}$$

である.

の解答群

- ① -2π ② 2π ③ $-\pi$ ④ π ⑤ $-\frac{\pi}{2}$
 ⑥ $\frac{\pi}{2}$ ⑦ $-(k+m)$ ⑧ $k+m$ ⑨ $-(k^2+m^2)$ ⑩ k^2+m^2

の解答群

- ① $k < m$ ② $k \leq m$ ③ $k = m$ ④ $k \neq m$ ⑤ $k = m + 1$
 ⑥ $m = k + 1$ ⑦ $k \geq m$ ⑧ $k > m$

計算用紙

問 3 区間 $-1 < x < 1$ で定義され区間 $0 < y < \pi$ に値をもつ関数 $y = \cos^{-1} x$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{5}$ である。

(2) y の導関数 $\frac{dy}{dx}$ は $\boxed{6}$ である。

(注) $\cos^{-1} x$ は $\arccos x$ と表される。

$\boxed{5}$ の解答群

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{3\pi}{4}$ ⑥ $\frac{5\pi}{6}$

$\boxed{6}$ の解答群

- ① $\sin x$ ② $-\sin x$ ③ $\cos x$ ④ $-\cos x$
 ⑤ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ⑥ $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ⑦ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ⑧ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 ⑨ $\frac{1}{1+x^2}$ ⑩ $-\frac{1}{1+x^2}$ ⑪ $\frac{1}{1-x^2}$ ⑫ $-\frac{1}{1-x^2}$

問 4 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ であるとき、2重積分 $\iint_D xy \, dx \, dy$ の値は $\boxed{7}$ である。

$\boxed{7}$ の解答群

- ① 0 ② $\frac{7\sqrt{2}}{24}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{48}$ ④ $\frac{15}{16}$ ⑤ $\frac{15}{32}$ ⑥ $\frac{15}{64}$
 ⑦ $\frac{21}{16}$ ⑧ $\frac{21}{32}$ ⑨ $\frac{255}{64}$ ⑩ $\frac{255}{128}$ ⑪ $\frac{255}{256}$

計算用紙

問 5 次の式が表す曲線あるいは曲面の概形として最適なものを解答群の中から選べ.

$$\boxed{8} : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

$$\boxed{9} : y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\boxed{10} : x^2 + y^2 - z = 0$$

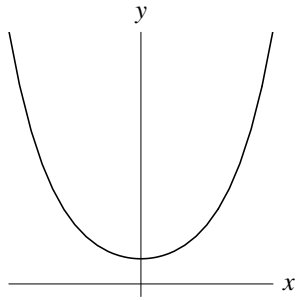
$$\boxed{11} : x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$$

$$\boxed{12} : \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = r \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi, r \geq 0)$$

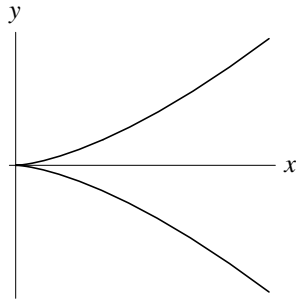
$$\boxed{13} : \begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = t \end{cases} \quad (t \geq 0)$$

8 ~ 13 の解答群

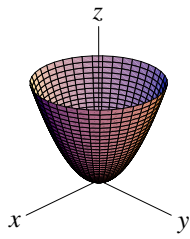
①



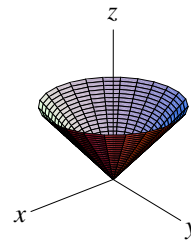
②



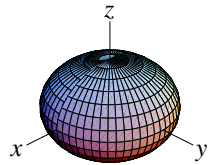
③



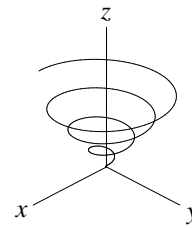
④



⑤



⑥



問 6 変数 x, y の関数 f は

$$f(x, y) = \frac{3}{4}x^4 - x^3y + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + 2y$$

で定義されているとする．方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

の解は $(0, -1)$ と $(-2, -2)$ である．このとき，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, -2) = \boxed{14} > 0$$

であり，

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, -2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2, -2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2, -2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2, -2) \end{vmatrix} = \boxed{15} > 0$$

であるから，関数 f は点 $(-2, -2)$ で $\boxed{16}$ ことがわかる．一方，関数 f は点 $(0, -1)$ の近くで $\boxed{17}$ ．

14, 15 の解答群

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4
- ⑥ 5
- ⑦ 6
- ⑧ 7
- ⑨ 8
- ⑩ 9
- ⑪ a 10
- ⑫ b 11
- ⑬ c 12
- ⑭ d 13
- ⑮ e 14
- ⑯ f 15

16 の解答群

- ① 極大である
- ② 極大でも極小でもない
- ③ 極小である
- ④ 定数である

17 の解答群

- ① 常に $f(0, -1)$ より大きい値をとる
- ② $f(0, -1)$ より大きい値も小さい値もとる
- ③ 常に $f(0, -1)$ より小さい値をとる
- ④ 常に値 $f(0, -1)$ をとる

第2分野 線形代数

[問 1 ~ 問 4 : 解答番号 ~]

問 1 行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
 の値は である.

の解答群

- ① 0 ② 5 ③ 9 ④ 12 ⑤ -12 ⑥ -9 ⑦ -5

計算用紙

問 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ とする .

(1) 行に関する基本変形を $(A|B)$ に施して ,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{19} \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right)$$

と変形できる .

$\boxed{19}$ の解答群

① $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $AX = B$ を満たす 3×2 行列 X は次の 4 個の行列の中に $\boxed{20}$ 個ある .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 1 & 2 \\ -13 & 15 \end{pmatrix}$$

$\boxed{20}$ の解答群

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

計算用紙

問 3 \mathbb{R}^3 を 3 次元実ベクトル空間とする .

(1) \mathbb{R}^3 の 3 つのベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

の間には線形関係

$$\mathbf{a}_1 + \boxed{21} \mathbf{a}_2 + \boxed{22} \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

がある . ここで , $\mathbf{0}$ は零ベクトルである .

(2) \mathbb{R}^3 の 2 つのベクトル $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を考える . $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

が \mathbb{R}^3 の正規直交基底になるのは \mathbf{u}_3 が $\pm \boxed{23}$ のときである .

$\boxed{21}$, $\boxed{22}$ の解答群

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1 ⑥ 2 ⑦ 3

$\boxed{23}$ の解答群

- ① $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ② $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ③ $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 ⑤ $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⑥ $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⑦ $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⑧ $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

計算用紙

問 4 2次式 $5x^2 + 4xy + 5y^2$ を対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ を用いて

$$5x^2 + 4xy + 5y^2 = (x \ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表す.

- (1) $a = \boxed{24}$, $b = \boxed{25}$, $c = \boxed{26}$ である.
- (2) A の固有値を α, β ($\alpha < \beta$) とすると, $\alpha = \boxed{27}$, $\beta = \boxed{28}$ である.
- (3) ベクトル $p = \boxed{29}$, $q = \boxed{30}$ はそれぞれ固有値 α, β に対する大きさ(長さ) 1 の固有ベクトルである.
- (4) p, q を順に第 1 列, 第 2 列とする正方行列を P とおく. 変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

により, 方程式 $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 1 = 0$ は X, Y を用いて $\boxed{31}$ と表せる.

方程式 $\boxed{31}$ の表す図形は $\boxed{32}$ である.

24 ~ 28 の解答群

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5 ⑦ 6
⑧ 7 ⑨ 8 ⑩ 9

29 , 30 の解答群

- ① $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ③ $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ ④ $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$
⑤ $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ⑥ $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ⑦ $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⑧ $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

31 の解答群

- ① $3X^2 + 7Y^2 - 1 = 0$ ② $3X^2 + 7Y^2 = 0$ ③ $3X^2 + 7Y^2 + 1 = 0$
④ $3X^2 - 7Y^2 - 1 = 0$ ⑤ $3X^2 - 7Y^2 = 0$ ⑥ $3X^2 - 7Y^2 + 1 = 0$
⑦ $7X^2 + 3Y^2 - 1 = 0$ ⑧ $7X^2 + 3Y^2 = 0$ ⑨ $7X^2 + 3Y^2 + 1 = 0$
⑩ $7X^2 - 3Y^2 - 1 = 0$ ⑪ $7X^2 - 3Y^2 = 0$ ⑫ $7X^2 - 3Y^2 + 1 = 0$

32 の解答群

- ① 空集合 ② 1点 ③ 2直線 ④ 放物線
⑤ だ円 ⑥ 双曲線

第3分野 常微分方程式

[問 1 ~ 問 6 : 解答番号 33 ~ 48]

(注意) 問 1 ~ 問 5 における y は x の関数であり, y' , y'' は y の導関数 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問 1 微分方程式

$$y' = \frac{x}{y}$$

の解で $y(1) = -2$ を満たすものは 33 である.

33 の解答群

- ① $y = -2x$ ② $y = 2x$ ③ $y = 3 - x^2$ ④ $y = x^2 - 3$
⑤ $y = -\sqrt{x^2 + 3}$ ⑥ $y = \sqrt{x^2 + 3}$

問 2 関数 $y = 3 \cos 2x - 4 \sin 2x$ が解となる微分方程式は 34 であり,

関数 $y = \sqrt{3} e^{2x} + 2x e^{2x}$ が解となる微分方程式は 35 である.

34 , 35 の解答群

- ① $y'' - 4y = 0$ ② $y'' - 4y = e^{2x}$ ③ $y'' + 4y = 0$
④ $y'' + 4y' = e^x$ ⑤ $y'' + 4y' - 4y = 0$ ⑥ $y'' - 4y' + 4y = 0$
⑦ $y'' - 2y' - 3y = 0$ ⑧ $y'' + 2y' + 3y = 0$ ⑨ $y'' + y' - 6y = 0$

問 3 xy 平面において，中心が x 軸上にあるすべての円が満たす微分方程式は 36 である．

36 の解答群

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|---------------------|
| ① $x + y' = 0$ | ④ $x + yy' = 0$ | ② $2x + (y')^2 = 0$ |
| ③ $1 + 2y' = 0$ | ④ $1 + (y')^2 + yy'' = 0$ | ⑤ $1 + y'y'' = 0$ |
| ⑥ $(y')^3 - xy'' + y' = 0$ | | |

問 4 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ を考える .

(1) $f(x) = 1$ のとき $y = \boxed{37}$ は特殊解 (特解) であり , $f(x) = e^x$ のとき $y = \boxed{38}$ は特殊解である .

(2) $f(x) = 2 - 3e^x$ とした微分方程式

$$y'' - 3y' + 2y = 2 - 3e^x$$

の解で初期条件

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

を満たすものは $y = \boxed{39}$ である .

$\boxed{37}$ ~ $\boxed{39}$ の解答群

① 0

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ $2e^x$

⑥ xe^x

⑦ $-2xe^x$

⑧ $-xe^x$

⑨ $3xe^x + 2e^{2x}$

⑩ $1 + 3xe^x - e^{2x}$

Ⓐ $(1 + 3x)e^x + 2e^{2x}$

Ⓑ $1 + (1 + 3x)e^x$

問 5 恒等的に 0 でない関数で , 2 つの微分方程式

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$y'' + y = 0$$

を同時に満たすものは $\boxed{40}$.

$\boxed{40}$ の解答群

① $y = e^{-3x}$

② $y = e^{-2x}$

③ $y = e^{-x}$

④ $y = e^x$

⑤ $y = e^{2x}$

⑥ $y = e^{3x}$

⑦ $y = \sin x$

⑧ $y = \cos x$

⑨ 存在しない

計算用紙

問 6 t の関数 x, y は微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y \end{cases}$$

を満たしているとする .

(1) $x(t)$ は 2 階の定数係数の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \boxed{41} \frac{dx}{dt} + \boxed{42} x = 0$$

を満たす . この微分方程式の解は , C_1, C_2 を任意定数として

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 \boxed{43}$$

と表され , さらに

$$y(t) = \boxed{44} C_1 e^{2t} + \boxed{45} C_2 \boxed{43}$$

がわかる .

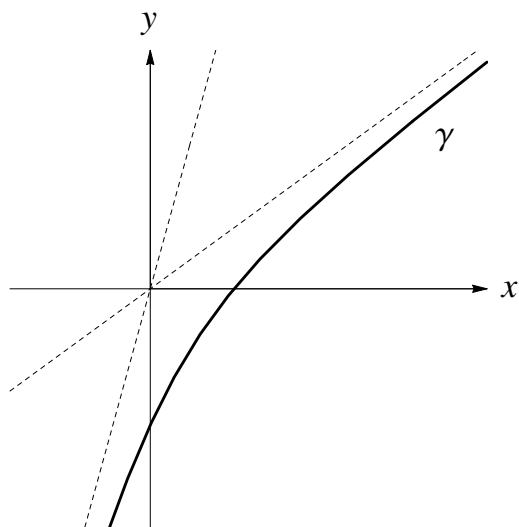
(2) $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ のとき ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \boxed{46}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \boxed{47}$$

が成り立つ . さらに $\boxed{48}$ のとき , 曲線

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

の概形は下図のようになる .



41, 42 の解答群

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5
⑦ -5 ⑧ -4 ⑨ -3 ⑩ -2 ⑪ -1

43 の解答群

- ① te^t ② te^{2t} ③ te^{3t} ④ e^{-t} ⑤ e^{-2t} ⑥ e^{-3t}

44 ~ 47 の解答群

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5
⑦ -5 ⑧ -4 ⑨ -3 ⑩ -2 ⑪ -1

48 の解答群

- ① $C_1 > 0, C_2 > 0$ ② $C_1 > 0, C_2 < 0$
③ $C_1 < 0, C_2 > 0$ ④ $C_1 < 0, C_2 < 0$

第4分野 確率・統計

〔 問 1 ~ 問 4 : 解答番号 49 ~ 65 〕

(注意) $P(A)$ は事象 A の起こる確率を表す. また, 確率変数 X に対し, $E(X), V(X)$ はそれぞれ平均 (期待値), 分散を表す.

問 1 赤玉と白玉が 1 : 9 の比率で入っている袋から無作為に玉を 1 個取り出し, 色を確認してから袋に戻す試行を 100 回行う. 確率変数 X_n ($n = 1, 2, \dots, 100$) を, n 回目に赤玉が出たら $X_n = 1$, 白玉が出たら $X_n = 0$ と定義する. このとき,

$$E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_{100}) = \boxed{49},$$

$$V(X_1) = V(X_2) = \dots = V(X_{100}) = \boxed{50}$$

である. また, $E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}\right)$ の値は 49 の 51 倍であり,

$V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}\right)$ の値は 50 の 52 倍である.

49, 50 の解答群

- | | | | | | | |
|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| ① $\frac{1}{2}$ | ② $\frac{1}{3}$ | ③ $\frac{1}{9}$ | ④ $\frac{5}{9}$ | ⑤ $\frac{8}{9}$ | ⑥ $\frac{1}{10}$ | ⑦ $\frac{3}{10}$ |
| ⑧ $\frac{9}{10}$ | ⑨ $\frac{1}{81}$ | ⑩ $\frac{25}{81}$ | a $\frac{64}{81}$ | b $\frac{1}{100}$ | c $\frac{9}{100}$ | d $\frac{81}{100}$ |

51, 52 の解答群

- | | | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|---------------------|---------|
| ① 1 | ② 10 | ③ 100 | ④ 1000 | ⑤ 10000 |
| ⑥ $\frac{1}{10}$ | ⑦ $\frac{1}{100}$ | ⑧ $\frac{1}{1000}$ | ⑨ $\frac{1}{10000}$ | |

計算用紙

問 2 確率変数 X は確率分布 $P(X = k) = (1 - p)^k p$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) に従うとする。ただし, $0 < p < 1$ とする。このとき, 正の整数 r について

$$\begin{aligned} P(X \geq r) &= P(X = r) + P(X = r + 1) + P(X = r + 2) + \dots \\ &= (1 - p)^r p + (1 - p)^{r+1} p + (1 - p)^{r+2} p + \dots \\ &= \boxed{53} \end{aligned}$$

となる。ゆえに, s も正の整数とすると, 条件付き確率について

$$P(X \geq r + s | X \geq r) = \boxed{54}$$

が成立する。

53 の解答群

- | | | |
|-------------------|---------------------|--------------------|
| ① p^r | ④ $1 - p^r$ | ⑦ $(1 - p)^r$ |
| ② $1 - (1 - p)^r$ | ⑤ $(1 - p)p^r$ | ⑧ $1 - (1 - p)p^r$ |
| ③ $(1 - p)^r p$ | ⑥ $1 - (1 - p)^r p$ | |

54 の解答群

- | | | |
|----------------------|------------------------|-----------------------|
| ① $P(X \geq r)$ | ④ $P(X \geq s)$ | ⑦ $P(X \geq r + s)$ |
| ② $P(X \geq 2r + s)$ | ⑤ $P(X \geq r(r + s))$ | ⑧ $P(X \geq 1 + s/r)$ |

計算用紙

問 3 確率変数 X, Y は, 0 以上 1 以下の実数を値にとり,

$$P(X \leq c) = \int_0^c dx \quad (0 \leq c \leq 1)$$

$$P(Y \leq c) = \int_0^c \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} dx \quad (0 \leq c \leq 1)$$

を満たす. このとき

$$E(X) = \boxed{55}, \quad E(X^2) = \boxed{56},$$

$$E(Y) = \boxed{57}, \quad E(Y^2) = \boxed{58}$$

である. また,

$$E(\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

が成り立つから, X と Y の相関係数

$$\frac{E(\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\})}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}}$$

が $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるならば $E(XY) = \boxed{59}$ である.

55 ~ **59** の解答群

- | | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ $\frac{1}{2}$ | ④ $\frac{1}{3}$ | ⑤ $\frac{2}{3}$ | ⑥ $\frac{1}{4}$ |
| ⑦ $\frac{3}{4}$ | ⑧ $\frac{1}{5}$ | ⑨ $\frac{2}{5}$ | ⑩ $\frac{3}{5}$ | ⑪ $\frac{4}{5}$ | ⑫ $\frac{1}{8}$ |
| ⑬ $\frac{3}{8}$ | ⑭ $\frac{5}{8}$ | ⑮ $\frac{7}{8}$ | ⑯ $\frac{1}{11}$ | ⑰ $\frac{3}{11}$ | ⑱ $\frac{1}{12}$ |

計算用紙

問 4 A 大学の U 教授の講義は面白くて人気がある．以前は，受講者の $\frac{4}{5}$ は単位を取れると学生の間で語り継がれていた．しかし最近は単位認定が厳しくなってきたと噂されている．平成 19 年度の単位取得者は受講者 100 人のうち 73 人であった．U 教授の単位認定は以前よりも厳しくなってきたと言えるだろうか？ これを判断するため，帰無仮説を「U 教授は受講者の $\frac{4}{5}$ の単位を認定する」として有意水準（危険率）5%で左片側検定を実施する．

まず，受講者 100 人のうち番号 n ($n = 1, 2, \dots, 100$) の学生について，単位を取れば $X_n = 1$ ，取れなければ $X_n = 0$ とおく．このとき，帰無仮説の下で統計量 $S = \sum_{n=1}^{100} X_n$ は 2 項分布に従い $E(S) = \boxed{60}$ ， $V(S) = \boxed{61}$ である．次に，平均が 0，分散が 1 になるように S を標準化した統計量を $T = \boxed{62}$ とすると，平成 19 年度の単位認定に対する T の実現値 t は $\boxed{63}$ となる． T の分布は平均 0，分散 1 の正規分布（標準正規分布）で近似されるので， $P(T \geq 1.645)$ はおよそ 0.05 であることがわかる．したがって， $\boxed{64}$ から，左片側検定において帰無仮説は有意水準（危険率）5%で $\boxed{65}$ ．

$\boxed{60}$ ， $\boxed{61}$ の解答群

- ① 100 ② 80 ③ 20 ④ 16 ⑤ 10 ⑥ 4
 ⑦ 2 ⑧ 1

$\boxed{62}$ の解答群

- ① $\frac{S-16}{20}$ ② $\frac{S-16}{80}$ ③ $\frac{S-20}{4}$ ④ $\frac{S-20}{16}$
 ⑤ $\frac{S-20}{20}$ ⑥ $\frac{S-80}{4}$ ⑦ $\frac{S-80}{16}$ ⑧ $\frac{S-80}{20}$

$\boxed{63}$ の解答群

- ① -2.85 ② 2.85 ③ -2.25 ④ 2.25 ⑤ -1.75
 ⑥ 1.75 ⑦ -0.44 ⑧ 0.44 ⑨ -0.35 ⑩ 0.35

64 の解答群

- ② $t \geq -1.645$ ① $t \leq -1.645$ ② $t \geq 1.645$
③ $t \leq 1.645$

65 の解答群

- ② 棄却される ① 棄却されない