EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2008年12月13日（土）
4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊ 受験分野は, 各大学の指示に従ってください.

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること.

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと.

(3) 開始の合図の後, 表紙裏の**解答上の注意**を読むこと.

(4) 問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせること.

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること.

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること.

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが, どのページも切り離さないこと.

(8) 試験開始 40 分後から退席を認める.

(9) 問題冊子は持ち帰ること.

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること.

(11) その他, 監督者の指示に従うこと.

解答上の注意

(1) 解答として最も相応しいものを指定された解答群から選んで解答用紙にマークすること．ただし，解答群に相応しいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば, $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して ⓒ と解答する場合は, 次のようにマークすること.

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は, 前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る.

(3) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする.

(4) $\log x$ は x の自然対数とする.

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 6 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{20}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ はそれぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある. 各逆関数がとる値の範囲（値域）は, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする.

問 1 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(x+1)} = \boxed{\mathbf{1}}$ である. また, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{x^3} = \boxed{\mathbf{2}}$ である.

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ $-\infty$　① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1　⑥ 2

⑦ 3　⑧ 4　⑨ 5　ⓐ ∞

問 2 関数 $f(x) = x\sin x$ について考える.

(1) $f(x)$ は $\boxed{\mathbf{3}}$ 関数であるから, $x=0$ における微分係数は任意の自然数 n に対して $\boxed{\mathbf{4}}$ を満たす.

$\boxed{3}$ の解答群

⓪ 偶　① 奇

$\boxed{4}$ の解答群

⓪ $f^{(n)}(0) = 0$　① $f^{(2n)}(0) = 0$　② $f^{(2n-1)}(0) = 0$

$\Big($ $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階導関数 $\dfrac{d^n f}{dx^n}(x)$ を表す$\Big)$

(2) 関数 $\sin x$ のマクローリン展開 ($x=0$ におけるテイラー展開) を考えることにより, $f(x)$ のマクローリン展開は $\boxed{\mathbf{5}}$ であることがわかる.

$\boxed{5}$ の解答群

⓪ $x + x^2 + \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^4}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{(n-1)!} + \cdots$

① $x - \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^5}{4!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n+1} + \cdots$

② $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$

③ $x^2 + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$

④ $x^2 - \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$

⑤ $x^2 + \dfrac{x^4}{3!} + \dfrac{x^6}{5!} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)!}x^{2n} + \cdots$

⑥ $x^2 - \dfrac{x^4}{3!} + \dfrac{x^6}{5!} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n} + \cdots$

問 3　関数 $f(x) = \log\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)$ の導関数は $\boxed{\textbf{6}}$ である．ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

$\boxed{\textbf{6}}$ **の解答群**

⓪ $\sin x$	① $\cos x$	② $\dfrac{1}{\sin x}$
③ $\dfrac{1}{\cos x}$	④ $-\dfrac{1}{\sin x}$	⑤ $-\dfrac{1}{\cos x}$
⑥ $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$	⑦ $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$	⑧ $-\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$
⑨ $-\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$	ⓐ $\dfrac{1-\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$	ⓑ $\dfrac{(1-\sin x)^2}{\cos^3 x}$

計算用紙

問 4 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{2+x-x^2}{1-x+x^2-x^3}\,dx$ を求める.

$$1-x+x^2-x^3 = (1-x)(1+x^2)$$

であるから, 被積分関数は

$$\frac{2+x-x^2}{1-x+x^2-x^3} = \frac{\boxed{\mathbf{7}}}{1-x} + \frac{\boxed{\mathbf{8}} + \boxed{\mathbf{9}}\,x}{1+x^2}$$

と部分分数展開される.

$\boxed{7}$ ・ $\boxed{8}$ ・ $\boxed{9}$ の解答群

⓪ -5　① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0　⑥ 1

⑦ 2　⑧ 3　⑨ 4　ⓐ 5

これより, $I = \displaystyle\int \left(\frac{\boxed{\mathbf{7}}}{1-x} + \frac{\boxed{\mathbf{8}} + \boxed{\mathbf{9}}\,x}{1+x^2} \right) dx$ である. ここで,

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{\boxed{\mathbf{7}}}{1-x}\,dx = \boxed{\mathbf{10}}, \\ \displaystyle\int \frac{\boxed{\mathbf{8}}}{1+x^2}\,dx = \boxed{\mathbf{11}}, \\ \displaystyle\int \frac{\boxed{\mathbf{9}}\,x}{1+x^2}\,dx = \boxed{\mathbf{12}} \end{cases}$$

であるから, $I = \boxed{\mathbf{10}} + \boxed{\mathbf{11}} + \boxed{\mathbf{12}}$ となる. ただし, 積分定数は省略してある.

$\boxed{10}$ ・ $\boxed{11}$ ・ $\boxed{12}$ の解答群

⓪ $\sin^{-1} x$	① $\cos^{-1} x$	② $\tan^{-1} x$
③ $\log(1+x^2)$	④ $-\log(1+x^2)$	⑤ $\log(1+x+x^2)$
⑥ $-\log(1+x+x^2)$	⑦ $\log\lvert 1-x\rvert$	⑧ $-\log\lvert 1-x\rvert$
⑨ $\dfrac{1}{(1-x)^2}$	ⓐ $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$	ⓑ $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

計算用紙

問 5 滑らかな関数 $z=f(x,y)$ で定義される曲面の上の 1 点 $(x,y,z)=(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は,

$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\big(x-a\big)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\big(y-b\big)$$

で与えられる.

$f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ であるとき, 点 $(x,y,z)=(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式は, $f(1,1)=$ **13** であるから,

$$z=\boxed{\mathbf{13}}+\boxed{\mathbf{14}}$$

になる.

13 **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\frac{1}{2}$	④ $\frac{1}{3}$	⑤ $\frac{1}{4}$	⑥ $\frac{1}{6}$
⑦ π	⑧ 2π	⑨ $\frac{\pi}{2}$	ⓐ $\frac{\pi}{3}$	ⓑ $\frac{2\pi}{3}$	ⓒ $\frac{\pi}{4}$	ⓓ $\frac{\pi}{6}$

14 **の解答群**

⓪ $x+y$	① $x-y$	② $-x+y$	
③ $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$	④ $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}$	⑤ $-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$	
⑥ $x+y+1$	⑦ $x+y-1$	⑧ $x-y-1$	⑨ $-x+y-1$
ⓐ $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+1$	ⓑ $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1$	ⓒ $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}-1$	ⓓ $-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1$

計算用紙

問 6　重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2-y^2)\,e^{(x-y)^2}dxdy$ を計算する．ここで D は xy 平面上の集合

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x-y\leqq 2,\ 0\leqq x+y\leqq 4\}$$

である．

変数変換　$x=u+v,\quad y=v-u$ を行うと，D は

$$D'=\{(u,v)\mid 0\leqq u\leqq \boxed{\mathbf{15}},\ 0\leqq v\leqq \boxed{\mathbf{16}}\}$$

に写る．変数変換のヤコビ行列式 (ヤコビアン) は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\boxed{\mathbf{17}}$$

である．したがって，

$$\iint_D (x^2-y^2)\,e^{(x-y)^2}dxdy=\iint_{D'}\boxed{\mathbf{18}}\,e^{\boxed{\mathbf{19}}}dudv$$

となる．これから累次積分を行うことにより積分値 $\boxed{\mathbf{20}}$ を得る．

15 ・ 16 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{4}$　⑦ $\dfrac{1}{8}$

17 の解答群

⓪ -4　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 4

⑦ $-\dfrac{1}{2}$　⑧ $\dfrac{1}{2}$　⑨ $-\dfrac{1}{4}$　ⓐ $\dfrac{1}{4}$

ⓑ $u+v$　ⓒ $u-v$　ⓓ uv　ⓔ u^2-v^2　ⓕ v^2-u^2

$\boxed{18}$ ・ $\boxed{19}$ の解答群

⓪ $-2u^2$	① $-u^2$	② u^2	③ $2u^2$	④ $4u^2$	⑤ $8u^2$
⑥ $-2v^2$	⑦ $-v^2$	⑧ v^2	⑨ $2v^2$	ⓐ $4v^2$	ⓑ $8v^2$
ⓒ uv	ⓓ $2uv$	ⓔ $4uv$	ⓕ $8uv$	ⓖ u^2+v^2	ⓗ u^2-v^2

$\boxed{20}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ e
⑤ $2e$	⑥ $\dfrac{e}{2}$	⑦ $e-1$	⑧ e^2-1	⑨ e^4-1
ⓐ $2(e-1)$	ⓑ $2(e^2-1)$	ⓒ $2(e^4-1)$		
ⓓ $\dfrac{1}{2}(e-1)$	ⓔ $\dfrac{1}{2}(e^2-1)$	ⓕ $\dfrac{1}{2}(e^4-1)$		

第２分野　線形代数

〔問１～問５：解答番号 $\boxed{\mathbf{21}}$ ～ $\boxed{\mathbf{37}}$ 〕

問１　$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1)　A の逆行列は,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & \boxed{\mathbf{21}} & -2 \end{pmatrix}$$

である.

$\boxed{\mathbf{21}}$ **の解答群**

⓪ -5　① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0　⑥ 1

⑦ 2　⑧ 3　⑨ 4　ⓐ 5

(2)　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は $\boxed{\mathbf{22}}$ である.

$\boxed{\mathbf{22}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -25 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -13 \end{pmatrix}$　⑥ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 2 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{23}}$ である.

$\boxed{\mathbf{23}}$ **の解答群**

⓪ -15	① -12	② -9	③ -6	④ -3	⑤ -2	⑥ -1
⑦ 0	⑧ 1	⑨ 2	ⓐ 3	ⓑ 6	ⓒ 9	ⓓ 12
ⓔ 15						

問 3　2 個のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ c \\ 2c \end{pmatrix}$ とそれから得られる行列 $A = \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$ について考える．ここで c は定数であり, ${}^t\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}$ の転置, すなわち ${}^t\boldsymbol{b} = (-1, c, 2c)$ である．

(1)　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が直交するのは, $c =$ $\boxed{\textbf{24}}$ のときである．

(2)　c の値に関わらず行列 A の階数は $\boxed{\textbf{25}}$ である．

$\boxed{\textbf{24}}$ ・ $\boxed{\textbf{25}}$ **の解答群**

⓪ -6　① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1　⑥ 0

⑦ 1　⑧ 2　⑨ 3　ⓐ 4　ⓑ 5　ⓒ 6

(3)　集合 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は $\boxed{\textbf{26}}$．ただし, $\mathbb{R}^3$ は 3 次元実ベクトル空間とし, $\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^3$ の零ベクトルとする．

(4)　集合 $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\}$ は $\boxed{\textbf{27}}$．

$\boxed{\textbf{26}}$ ・ $\boxed{\textbf{27}}$ **の解答群**

⓪ $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間ではない

① $\mathbb{R}^3$ の 0 次元ベクトル部分空間である

② $\mathbb{R}^3$ の 1 次元ベクトル部分空間である

③ $\mathbb{R}^3$ の 2 次元ベクトル部分空間である

④ $\mathbb{R}^3$ の 3 次元ベクトル部分空間である

計算用紙

問 4 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．自然数 n に対する A の n 乗 A^n を A の固有値と固有ベクトルを利用して求める．

(1) A の固有値を α, β (ただし $\alpha < \beta$) とすると, $\alpha = \boxed{\textbf{28}}$, $\beta = \boxed{\textbf{29}}$ である．

(2) 固有値 α に対応する A の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{30}} \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 β に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{31}} \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

(3) いま $\boldsymbol{p}$ を第 1 列, $\boldsymbol{q}$ を第 2 列とする 2 次正方行列 $(\boldsymbol{p}\ \ \boldsymbol{q})$ を考えると,

$$A(\boldsymbol{p}\ \ \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p}\ \ \boldsymbol{q}) \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{28}} & 0 \\ 0 & \boxed{\textbf{29}} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ここで

$$P = (\boldsymbol{p}\ \ \boldsymbol{q}), \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{28}} & 0 \\ 0 & \boxed{\textbf{29}} \end{pmatrix}$$

とおくことにより $A = PBP^{-1}$ を得る．これから,

$$A^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}_{n\ 個} = PB^nP^{-1}$$

となる．この式を使って計算すれば $A^n = \boxed{\textbf{32}}$ である．

$\boxed{\textbf{28}}$ 〜 $\boxed{\textbf{31}}$ の解答群

⓪ -5	① -4	② -3	③ -2	④ -1	⑤ 0	⑥ 1
⑦ 2	⑧ 3	⑨ 4	ⓐ 5	ⓑ 6	ⓒ 7	ⓓ 8
ⓔ 9	ⓕ 10	ⓖ 11	ⓗ 12			

$\boxed{\mathbf{32}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 3^n & 2^n \\ (-1)^n & 0 \end{pmatrix}$

① $\begin{pmatrix} 2+3^{n-1} & 1+2^{n-1} \\ -2+(-1)^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1+2^n & 2^n \\ 1-2^n & 2-2^n \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & -2+2^{n+1} \\ 1-2^n & 2-2^n \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 1+2^n & 2^n \\ 3-2^{n+1} & 4-2^{n+1} \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & -2+2^{n+1} \\ 3-2^{n+1} & 4-2^{n+1} \end{pmatrix}$

問 5 3 個のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．ただし a は定数である．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立になるのは, $a \neq$ $\boxed{\textbf{33}}$ のときである．

(2) $a \neq$ $\boxed{\textbf{33}}$ とする．いま 3 次正方行列 A が

$$A\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1, \qquad A\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_2, \qquad A\boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$$

を満たすとする．ベクトル

$$\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \qquad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

が A の固有ベクトルになるのは, $\alpha =$ $\boxed{\textbf{34}}$, $\beta =$ $\boxed{\textbf{35}}$ のときであり, $\boldsymbol{w}$ は A の固有値 $\boxed{\textbf{36}}$ に対応する固有ベクトルになる．また, A の行列式の値は $\boxed{\textbf{37}}$ である．

$\boxed{\textbf{33}}$ 〜 $\boxed{\textbf{37}}$ の解答群

⓪ -6	① -5	② -4	③ -3	④ -2	⑤ -1
⑥ 0	⑦ 1	⑧ 2	⑨ 3	ⓐ 4	ⓑ 5
ⓒ 6	ⓓ 7	ⓔ 8	ⓕ 9	ⓖ 10	

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{38}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{54}}$ 〕

(注意) 問1〜問4における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問 1　微分方程式

$$y' = (1-2x)y^2$$

の一般解は任意定数 C を用いて $y = \boxed{\mathbf{38}}$ で与えられる.

解 $y(x)$ が $y(0)=2$ を満たすのは, $C = \boxed{\mathbf{39}}$ のときである. この $y(x)$ はすべての実数 x について正の値をとり, $x < \boxed{\mathbf{40}}$ のとき $y'(x) > 0$ であり, $x > \boxed{\mathbf{40}}$ のとき $y'(x) < 0$ である. したがって $y(x)$ は, $x = \boxed{\mathbf{40}}$ において最大値 $\boxed{\mathbf{41}}$ をとる.

$\boxed{\mathbf{38}}$ の解答群

⓪ $2x+C$　① $-2x+C$　② x^2-x+C

③ $-x^2+x+C$　④ $\dfrac{C}{x}$　⑤ $\dfrac{C}{x^2-x}$

⑥ $\dfrac{1}{2x}+C$　⑦ $-\dfrac{1}{2x}+C$　⑧ $\dfrac{1}{x^2-x}+C$

⑨ $-\dfrac{1}{x^2-x}+C$　ⓐ $\dfrac{1}{2x+C}$　ⓑ $-\dfrac{1}{2x+C}$

ⓒ $\dfrac{1}{x^2-x+C}$　ⓓ $-\dfrac{1}{x^2-x+C}$

$\boxed{\mathbf{39}}$ ・ $\boxed{\mathbf{40}}$ ・ $\boxed{\mathbf{41}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ $-\dfrac{3}{2}$　⑧ $-\dfrac{1}{2}$　⑨ $\dfrac{1}{2}$　ⓐ $\dfrac{3}{2}$

ⓑ $-\dfrac{4}{3}$　ⓒ $-\dfrac{2}{3}$　ⓓ $-\dfrac{1}{3}$　ⓔ $\dfrac{1}{3}$　ⓕ $\dfrac{2}{3}$　ⓖ $\dfrac{4}{3}$

計算用紙

問 2　微分方程式

$$y' + xy = \frac{x}{y} \qquad \cdots\cdots \ (a)$$

を変数変換によって解く．

未知関数 $z(x)$ を $z = y^2$ で導入すると $z' = 2yy'$ であるから, 方程式 (a) より z に関する線形微分方程式

$$z' + \boxed{\mathbf{42}}\, z = 2x \qquad \cdots\cdots \ (b)$$

を得る．方程式 (b) の一般解は $z = \boxed{\mathbf{43}} + Ce^{\boxed{\mathbf{44}}}$ である．ただし, C は任意定数である．これから $y(0) = 2$ を満たす方程式 (a) の解は,

$$y(x) = \sqrt{\boxed{\mathbf{43}} + \boxed{\mathbf{45}}\, e^{\boxed{\mathbf{44}}}}$$

と求められる．

$\boxed{42}$ ・ $\boxed{43}$ ・ $\boxed{44}$ の解答群

0 -4　1 -3　2 -2　3 -1　4 1　5 2　6 3

7 4　8 $-x$　9 x　a $-2x$　b $2x$　c $-\frac{x}{2}$　d $\frac{x}{2}$

e $-x^2$　f x^2

$\boxed{45}$ の解答群

0 -4　1 -3　2 -2　3 -1　4 0　5 1　6 2

7 3　8 4　9 $-\frac{1}{2}$　a $\frac{1}{2}$　b $-\frac{1}{3}$　c $\frac{1}{3}$

計算用紙

問 3 関数 $y(x)$ は, 微分方程式

$$y'' = ay$$

の解で, $y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$ を満たすとする. ただし a は定数である.

(1) $a = 0$ のとき, $y(x)$ は $x = \boxed{\mathbf{46}}$ において 0 の値をとる.

(2) $a = \boxed{\mathbf{47}}$ のとき, $y(x)$ は周期 π の周期関数になる.

(3) $a = \boxed{\mathbf{48}}$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ となる.

$\boxed{\mathbf{46}}$ ・ $\boxed{\mathbf{47}}$ ・ $\boxed{\mathbf{48}}$ の解答群

⓪ -4	① -3	② -2	③ -1	④ 0	⑤ 1
⑥ 2	⑦ 3	⑧ 4			
⑨ $-\dfrac{1}{2}$	ⓐ $\dfrac{1}{2}$	ⓑ $-\dfrac{1}{3}$	ⓒ $\dfrac{1}{3}$	ⓓ $-\dfrac{1}{4}$	ⓔ $\dfrac{1}{4}$

計算用紙

問 4　(1)　微分方程式

$$y'' + 4\,y' + 13\,y = 0$$

の一般解は $y(x) = \boxed{\textbf{49}}$ である．さらに初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 3$ を満たす解は $y(x) = \boxed{\textbf{50}}$ である．

$\boxed{\textbf{49}}$ の解答群

⓪ $C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{3x}$　① $C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{-3x}$

② $e^{2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$　③ $e^{3x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$

④ $e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$　⑤ $e^{-3x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$

(C_1, C_2 は任意定数)

$\boxed{\textbf{50}}$ の解答群

⓪ e^{2x}　① e^{3x}　② e^{-2x}　③ e^{-3x}

④ $e^{2x}\cos 3x$　⑤ $e^{2x}\sin 3x$　⑥ $e^{-2x}\cos 3x$　⑦ $e^{-2x}\sin 3x$

⑧ $e^{3x}\cos 2x$　⑨ $e^{3x}\sin 2x$　ⓐ $e^{-3x}\cos 2x$　ⓑ $e^{-3x}\sin 2x$

(2) 定数 A, B を $A = \boxed{\textbf{51}}$, $B = \boxed{\textbf{52}}$ と定めると関数

$$y(x) = A\cos x + B\sin x$$

は微分方程式

$$y'' + 4\,y' + 13\,y = 40\sin x$$

の解になる．この $y(x)$ は, 周期が $\boxed{\textbf{53}}$ で, 振幅（$|y(x)|$ の最大値）が $\boxed{\textbf{54}}$ の周期関数である.

$\boxed{\textbf{51}}$ ・ $\boxed{\textbf{52}}$ の解答群

⓪ -6　① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1　⑥ 0

⑦ 1　⑧ 2　⑨ 3　ⓐ 4　ⓑ 5　ⓒ 6

$\boxed{\textbf{53}}$ の解答群

⓪ π　① 2π　② 3π　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ $\dfrac{\pi}{3}$　⑤ $\dfrac{2\pi}{3}$

$\boxed{\textbf{54}}$ の解答群

⓪ 2　① 3　② 4　③ 5　④ 8　⑤ 10

⑥ $\sqrt{2}$　⑦ $2\sqrt{2}$　⑧ $\sqrt{3}$　⑨ $2\sqrt{3}$　ⓐ $\sqrt{5}$　ⓑ $\sqrt{10}$

第4分野　確率・統計

〔 問1 ～ 問6 ： 解答番号 $\boxed{55}$ ～ $\boxed{71}$ 〕

(注意) $P(A)$ は事象 A の起こる確率を表す. また, 確率変数 X に対し, $E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均, 平均値), 分散を表す.

問1　確率変数 X が確率分布

X の値	1	2	3
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

に従うとき, その期待値は $E(X) = \boxed{55}$ であり, 分散は $V(X) = \boxed{56}$ である.

$\boxed{55}$ ・ $\boxed{56}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ $\frac{1}{3}$　⑧ $\frac{2}{3}$　⑨ $\frac{4}{3}$　ⓐ $\frac{5}{3}$　ⓑ $\frac{7}{3}$　ⓒ $\frac{4}{9}$　ⓓ $\frac{5}{9}$　ⓔ $\frac{7}{9}$

問2　確率変数 X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とする. $F(1) = 0.4$,　$F(5) = 1$ であるとき, $P(1 < X \leqq 5) = \boxed{57}$ である.

$\boxed{57}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 0.2　③ 0.4　④ 0.6　⑤ 0.8

計算用紙

問 3 確率変数 X, Y が

$$P(X \leqq 3) = \frac{1}{2}, \quad P(Y > 4) = \frac{1}{2}, \quad P(X \leqq 3, Y > 4) = \frac{1}{4}$$

を満たしているとする. このとき,

- 2つの事象 $\{X \leqq 3\}$ と $\{Y > 4\}$ は $\boxed{\textbf{58}}$.
- X と Y は $\boxed{\textbf{59}}$.
- さらに $E(X) = 3,\ E(Y) = 4,\ E(XY) \neq 12$ ならば, X と Y は $\boxed{\textbf{60}}$.

$\boxed{\textbf{58}}$ ・ $\boxed{\textbf{59}}$ ・ $\boxed{\textbf{60}}$ **の解答群**

⓪ 独立である
① 従属である
② 独立であるとも従属であるともいえない

問 4 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (\,|x| \leqq 1 \text{ のとき}\,), \\ 0 & (\,|x| > 1 \text{ のとき}\,) \end{cases}$$

で与えられているとき, 確率変数 X の期待値は $E(X) = \boxed{\textbf{61}}$ であり, 分散は $V(X) = \boxed{\textbf{62}}$ である.

$\boxed{\textbf{61}}$ ・ $\boxed{\textbf{62}}$ **の解答群**

⓪ 0 ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$ ⑥ $\frac{1}{6}$ ⑦ $\frac{5}{6}$

計算用紙

問 5　A 大学の U 教授の研究室では, ある池のカエルの生態調査をすることになった. 池から 20 匹のカエルを捕まえて体長を測定したところ,

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{20}\} =$$
$$\{122, 65, 104, 126, 103, 123, 76, 80, 98, 99, 61, 110, 125, 98, 111, 112, 94, 120, 73, 100\}$$

となった (単位：mm). 池のカエルの体長が母平均 μ mm, 母分散 σ^2 mm^2 の正規分布に従っているものと仮定して μ, σ^2 を推定したい.

モーメントに着目して母数を推定してみる. 標本 1 次モーメント（標本平均値）は $\boxed{\textbf{63}}$, 標本 2 次モーメントは $\boxed{\textbf{64}}$ で計算される. これらに上のデータを代入するとそれぞれの値は $\boxed{\textbf{63}} = 100$, $\boxed{\textbf{64}} = 10380$ となる.

一方, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X の 1 次モーメント $E(X)$ と 2 次モーメント $E(X^2)$ は $E(X) = \boxed{\textbf{65}}$, $E(X^2) = \boxed{\textbf{66}}$ である.

標本モーメントと確率変数のモーメントが等しいものと仮定すると, 母数に関する式 $\boxed{\textbf{65}} = \boxed{\textbf{63}}$, $\boxed{\textbf{66}} = \boxed{\textbf{64}}$ を得る. これらの式を満たす μ, σ^2 を $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma}^2$ と書き, 母数の推定値として採用する. いまの場合, $\widehat{\mu} = \boxed{\textbf{67}}$, $\widehat{\sigma}^2 = \boxed{\textbf{68}}$ となる. このような推定法はモーメント推定法と呼ばれている.

63 ・ **64** の解答群

⓪ $\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\sqrt{x_i}$　① $\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i$　② $\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}2x_i$　③ $\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}{x_i}^2$

④ $\frac{1}{\sqrt{20}}\sum_{i=1}^{20}x_i$　⑤ $\frac{1}{\sqrt{20}}\sum_{i=1}^{20}2x_i$　⑥ $\frac{1}{\sqrt{20}}\sum_{i=1}^{20}{x_i}^2$

65 ・ **66** の解答群

⓪ μ　① σ　② μ^2　③ σ^2　④ $\mu + \sigma$　⑤ $\mu + \sigma^2$　⑥ $\mu^2 + \sigma^2$

67 ・ **68** の解答群

⓪ 10　① 20　② 100　③ $\sqrt{380}$　④ 380　⑤ 400

⑥ $\sqrt{10280}$　⑦ 10280　⑧ 10280^2　⑨ $\sqrt{10380}$　ⓐ 10380　ⓑ 10380^2

計算用紙

問 6　母平均 μ が未知で, 母分散が 10^2 である正規分布 $N(\mu,\,10^2)$ に従う母集団から 10 個の標本を取り出したところ, 標本平均値が $\overline{x}=20$ であった. このとき母平均 μ の信頼度 99 % の信頼区間を求めたい.

標本平均 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_{10}}{10}$ は平均 μ, 分散 10 の正規分布に従うから,

$$Z=\frac{\overline{X}-\boxed{\mathbf{69}}}{\boxed{\mathbf{70}}}$$

は標準正規分布 $N(0,\,1)$ に従う. 正規分布表によれば $P(-2.576\leqq Z\leqq 2.576)\fallingdotseq 0.99$ であるので, 不等式

$$20-2.576\times\sqrt{10}\leqq\mu\leqq 20+2.576\times\sqrt{10}$$

が導かれる. これを計算すれば, 母平均 μ の信頼度 99 % の信頼区間は [11.854, 28.146] となる.

また, 同じ母集団から 30 個の標本を取り出して同様に信頼度 99 % の信頼区間を求めると, 標本の数を増やすことにより情報が増えるから信頼区間の幅は $\boxed{\mathbf{71}}$.

$\boxed{\mathbf{69}}$ ・ $\boxed{\mathbf{70}}$ の解答群

⓪ 10　① $\sqrt{10}$　② 10^2　③ 20　④ $\sqrt{20}$　⑤ 20^2

⑥ μ　⑦ $\sqrt{\mu}$　⑧ μ^2

$\boxed{\mathbf{71}}$ の解答群

⓪ 広くなる　① 狭くなる　② 変わらない

計算用紙