中国・四国地区国立大学工学系学部
数学統一試験

2003年12月23日（火曜）（祝日）
午後1時30分 〜 午後4時

受験上の注意

(1) 各自の**机の右上に学生証を提示**し、監督官の照合を受けること。

(2) 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。

(3) 解答は各問題の指示にしたがってマークシートにマークすること。

(4) マークには **HB または B の鉛筆**（またはシャープペンシル）を使用すること。芯の黒色が薄いと正しく読み取りができないので、採点に誤りが出る可能性がある。修正にはプラスチック材質の消しゴムを使用すること。

(5) マークシートは**破損しないように**丁寧に扱うこと。記入時等にマークシートを**破損したときは監督官に知らせて交換**を要請すること。新しいシートには破損によって書直しが必要と思われる部分、および新規分のみ記入していくこと。破損部分の**書き写しは試験終了後に監督官立ち会い**の下で行う。その他、監督官の指示に従うこと。

(6) 試験開始後、途中での退席は特別の事情がない限り認めない。

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離さないこと。試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

(8) 試験時間は **150 分**である。

計 算 用 紙

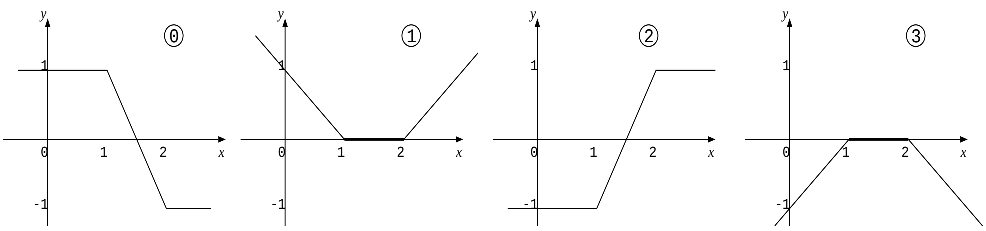
第 1 問　〔解答番号 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 〕　(配点 50 点)

以下の空欄にそれぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ。

(注意) log は自然対数とする。

問 1　関数 $f(x) = |x-2| - |x-1|$ をグラフで表すと $\boxed{1}$ のようになる。

$\boxed{1}$ の解答群



問 2　関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ は $x \to \infty$ のとき $\boxed{2}$ する。

$\boxed{2}$ の解答群

⓪ ∞ に発散　① 0 に収束　② 1 に収束　③ 振動

問 3　関数 $f(x)$ について $\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int f(x) \, dx$ が成り立つとする。 ただし $\tan^{-1} x$ は $\tan x$ の逆関数とする。このとき $f(x) = \boxed{3}$ である。

$\boxed{3}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x}{1+x^2}$　① $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　② $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$　③ $x(1+x^2)$

問 4　関数 $f(x) = \log(1+x)$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開すると $\boxed{4}$ となる。

$\boxed{4}$ の解答群

⓪ $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$　① $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

② $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$　③ $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

問 5　全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ の xyz-空間におけるグラフ上の点 $(a, b, f(a, b))$ での接平面の方程式は

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

で与えられる。これを用いて関数 $z = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ の点 $(3, 4)$ における接平面の方程式を求めると $\boxed{\mathbf{5}}$ となる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ **の解答群**

⓪ $z = \dfrac{3}{25}x + \dfrac{4}{25}y + \log 5 - 1$　　① $z = \dfrac{4}{25}x + \dfrac{3}{25}y + 1 - \log 5$

② $z = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \log 5$　　③ $z = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y + \log 5$

第 2 問 〔解答番号 $\boxed{6}$ 〜 $\boxed{15}$ 〕 （配点 50 点）

以下の空欄のうち、$\boxed{6}$、$\boxed{7}$ にはそれぞれの解答群から適当なものを選んでマークし、それ以外の空欄には当てはまる数字をマークせよ。

重積分

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad D = \{\,(x,y)\,|\,0 \leq x,\ 0 \leq y\,\}$$

の計算を考える。I に座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r > 0)$ を施して計算すると

$$I = \int_0^{\boxed{6}} \left\{ \int_0^{\infty} \boxed{7}\, dr \right\} d\theta$$

が得られる。

$\boxed{6}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ π　⑤ 4　⑥ 2π

⑦ $\dfrac{\pi}{2}$　⑧ $\dfrac{\pi}{4}$　⑨ ∞

$\boxed{7}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{(1+r)^2}$　① $\dfrac{1}{(1+r^2)^2}$　② $\dfrac{r}{(1+r)^2}$　③ $\dfrac{r}{(1+r^2)^2}$

④ $\dfrac{r^2}{(1+r^2)^2}$

このうち、

$$\int_0^{\infty} \boxed{7}\, dr$$

の部分に関して、区間 $[0, R]\ (0 < R < \infty)$ 上の積分を計算すると

$$\int_0^{R} \boxed{7}\, dr = \frac{R^{\boxed{8}}}{\boxed{9}\,(\boxed{10} + R^{\boxed{11}})}$$

が得られるので、

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^{\boxed{6}} \left\{ \int_0^{R} \boxed{7}\, dr \right\} d\theta \\ &= \frac{\boxed{12}}{\boxed{13}}\pi \times \frac{R^{\boxed{8}}}{\boxed{9}\,(\boxed{10} + R^{\boxed{11}})} \end{aligned}$$

となって、求めたい重積分 I の値は、

$$I = \lim_{R \to \infty} I_R = \frac{\boxed{\mathbf{14}}}{\boxed{\mathbf{15}}}\pi$$

であることがわかる。

第 3 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{16}}$ ～ $\boxed{\mathbf{25}}$ 〕　(配点 60 点)

以下の空欄に当てはまる数字をマークせよ。

問 1　2 次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 2 次方程式

$$x^2 - \boxed{\mathbf{16}}\, x - \boxed{\mathbf{17}} = 0$$

の解であり、その解は $\boxed{\mathbf{18}} + \sqrt{\boxed{\mathbf{19}}}$ と $\boxed{\mathbf{20}} - \sqrt{\boxed{\mathbf{21}}}$ である。

問 2　x を実数とし 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} x & x & 1 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix}$ の階数は実数 x の値によって異なる。この行列の階数が最小になるときの x の値は $\boxed{\mathbf{22}}$ である。

問 3　z を整数とし、4 次正方行列 A を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & z \end{pmatrix}$$

このとき、行列 A の行列式が -5 となる為には $z = \boxed{\mathbf{23}}$ または $-\boxed{\mathbf{24}}$ となることが必要かつ十分である。

問 4　次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が張る 3 次元実数ベクトル空間の部分空間の次元は $\boxed{\mathbf{25}}$ 次元である。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

第 4 問 〔解答番号 $\boxed{\mathbf{26}}$ ～ $\boxed{\mathbf{32}}$ 〕 (配点 40 点)

以下の空欄にあてはまる数字をマークせよ。

3 次正方行列 S を次の通りとする。

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

問 1 このとき行列 S の相異なる 3 つの固有値を絶対値の大きい順に並べると、

$$\boxed{\mathbf{26}} + \sqrt{\boxed{\mathbf{27}}}, \quad \boxed{\mathbf{28}}, \quad \boxed{\mathbf{29}} - \sqrt{\boxed{\mathbf{30}}}$$

となる。

問 2 これら 3 つの固有値の中で絶対値の最も大きな固有値に対する固有ベクトルの 1 つは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\boxed{\mathbf{31}} \\ \sqrt{\boxed{\mathbf{32}}} \end{pmatrix}$$

である。

第 5 問　〔解答番号 $\boxed{33}$ ～ $\boxed{39}$ 〕　(配点 50 点)

以下の空欄のうち $\boxed{36}\boxed{37}$、$\boxed{38}$ には当てはまる符号または数字をマークし、それ以外の空欄には解答群から適当なものを選んでマークせよ。

(注意) 問１、問２における y は x の関数 $y(x)$ であり、y' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を表す。

問１ $\dfrac{1}{1+x}$ が解になる微分方程式は $\boxed{33}$ である。一方、$\sin x$ が解になる微分方程式は $\boxed{34}$ である。

$\boxed{33}$ ・ $\boxed{34}$ の解答群

⓪ $y'+y=0$　① $y'+y^2=0$　② $y'-y^2=0$

③ $(y')^2+y-1=0$　④ $y'+y^2-1=0$　⑤ $(y')^2+y^2-1=0$

問２ $y(x)$ に関する微分方程式

$$y'-3\,y=3\,x-4 \qquad \cdots \ (\text{ア})$$

に対して以下の問に答えよ。

(1) 同次方程式 $y'-3\,y=0$ の一般解 y_h を

$$y_h(x)=C\,z(x) \qquad (C \text{ は任意定数})$$

と表すと $z(x)=\boxed{35}$ である。

(2) 方程式 (ア) の特殊解 y_s として $y_s(x)=\alpha\,x+\beta$ （α, β は定数）なる形の解を探すと $\alpha=\boxed{36}\boxed{37}$、$\beta=\boxed{38}$ である。

(3) (1) と (2) の結果を使って初期条件 $y(0)=2$ を満たす (ア) の解 $y(x)$ を求めたとき、$x=1$ における値 $y(1)$ は $\boxed{39}$ である。

$\boxed{35}$ ・ $\boxed{39}$ の解答群

⓪ e^{3x}　① e^{-3x}　② $\dfrac{1}{3}x^3$　③ $\cos 3x$　④ $\sin 3x$

⑤ e^3　⑥ $2e^3-4$　⑦ e^{-3}　⑧ $e^{-3}+2$　⑨ $3\,e^{-3}-1$

第 6 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{40}}$ ～ $\boxed{\mathbf{50}}$ 〕　(配点 50 点)

以下の空欄には当てはまる符号または数字を選んでマークせよ。

(注意) 各問における y は x の関数 $y(x)$ であり、y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す。

問 1　初期値問題

$$y'' = -6\,x + 2, \qquad y(0) = 5, \quad y'(0) = 1$$

の解 $y(x)$ は、範囲 $x \geq 0$ で考えると $x = \boxed{\mathbf{40}}$ で最大値 $\boxed{\mathbf{41}}$ を取る。

問 2　(1)　微分方程式

$$y'' + 4\,y = 0$$

の一般解を

$$y(x) = A\,\cos\omega x + B\,\sin\omega x \qquad (\,\omega \text{ は定数}, A, B \text{ は任意定数}\,)$$

と表すとき $\omega = \boxed{\mathbf{42}}$ である。

(2)　(1) で求めた一般解を使って初期条件 $y(0) = 4, y'(0) = -2$ を満たす解を求めると $A = \boxed{\mathbf{43}}$ 、$B = \boxed{\mathbf{44}}\boxed{\mathbf{45}}$ である。この解を

$$y(x) = C\,\sin(\omega\,x + \delta) \qquad (\,C, \delta \text{ は定数}\,)$$

と表したとき $C = \sqrt{\boxed{\mathbf{46}}\boxed{\mathbf{47}}}$ である。

問 3　関数　$e^{-x}\sin 3x$ が定数係数同次微分方程式

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

の解であるとき、係数はそれぞれ $p = \boxed{\mathbf{48}}$ 、$q = \boxed{\mathbf{49}}\boxed{\mathbf{50}}$ である。

第 7 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{51}}$ ～ $\boxed{\mathbf{55}}$ 〕　（配点 30 点）

以下の各文章が正しい場合は 1 を、誤っている場合には 0 を各空欄にマークせよ。

$\boxed{\mathbf{51}}$ 有限個の部品が入ったロットから n 個の標本をランダムに抽出することを考える。部品を 1 個抜き取って良品か不良品かを調べたら元に戻して、次にランダムにまた部品を 1 個抜き取って良品か不良品かを調べたら元に戻す。このようなことを n 回繰り返して得られた不良品の個数の分布と、元に戻さないでランダムに部品を n 個抜き取って不良品の個数を調べるときの不良品の個数の分布とは、同じ n 個を抜き取るのだから同じである。

$\boxed{\mathbf{52}}$ 平均に関する仮説検定において、帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$、対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ として仮説検定を行った結果、有意ではなかった。従って帰無仮説は棄却されないので母平均は μ_0 である。

$\boxed{\mathbf{53}}$ 標本相関係数の絶対値は 1 をこえることはない。

$\boxed{\mathbf{54}}$ 信頼区間を求めるとき、信頼度（信頼係数）はなるべく大きくして求めた方が良い。

$\boxed{\mathbf{55}}$ 確率変数 X, Y が独立ならば、X と Y との相関係数は 0 である。

第 8 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{56}}$ ～ $\boxed{\mathbf{69}}$ 〕　(配点 70 点)

以下の空欄にそれぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ。

確率変数 X の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

このとき、X の分布関数 $F_X(x)$ は

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

であるから、$-\infty < x < -1$ のときは $F_X(x) = \boxed{\mathbf{56}}$ である。次に $-1 \leq x \leq 1$ のときは

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} \boxed{\mathbf{57}}\, ds$$

となるから、この積分を計算して $F_X(x) = \boxed{\mathbf{58}}$ を得る。更に $1 < x$ のときは $F_X(x) = \boxed{\mathbf{59}}$ となる。

$\boxed{\mathbf{56}}$ ・ $\boxed{\mathbf{57}}$ ・ $\boxed{\mathbf{58}}$ ・ $\boxed{\mathbf{59}}$ の解答群

⓪ -2　① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1　⑥ 2

⑦ x　⑧ $x+1$　⑨ $\dfrac{1}{2}x$　ⓐ $\dfrac{1}{2}(x+1)$　ⓑ $\dfrac{1}{2}(x-1)$

さて、新しく確率変数 Y を $Y = X^2$ で定義する。この確率変数 Y の分布関数 $F_Y(y)$ および確率密度関数 $f_Y(y)$ を以下のように求めてみよう。

分布関数 $F_Y(y)$ は $Y \leq y$ となる確率 $Pr(Y \leq y)$ であるから、確率変数 Y が負にならないことに注意すると $F_Y(y) = 0$ $(y < 0)$ である。$y \geq 0$ のとき

$$F_Y(y) = Pr(Y \leq y) = Pr(X^2 \leq y) = Pr(\boxed{\mathbf{60}} \leq X \leq \boxed{\mathbf{61}})$$

$$= F_X(\boxed{\mathbf{62}}) - F_X(\boxed{\mathbf{63}})$$

である。ここで、最初に求めた $F_X(x)$ を適用することによって $0 \leq y \leq 1$ のとき

$$F_Y(y) = F_X(\boxed{\mathbf{62}}) - F_X(\boxed{\mathbf{63}}) = \boxed{\mathbf{64}} - \boxed{\mathbf{65}} = \boxed{\mathbf{66}}$$

を得る。また、$1 < y$ のときは $F_Y(y) = \boxed{\mathbf{67}}$ となる。

$\boxed{\mathbf{60}}$ ・ $\boxed{\mathbf{61}}$ ・ $\boxed{\mathbf{62}}$ ・ $\boxed{\mathbf{63}}$ **の解答群**

⓪ $-y$　① y　② $-y^2$　③ y^2　④ $-\sqrt{y}$　⑤ $\sqrt{y}$

⑥ $-\dfrac{1}{\sqrt{y}}$　⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$　⑧ $-\dfrac{1}{y}$　⑨ $\dfrac{1}{y}$

$\boxed{\mathbf{64}}$ ・ $\boxed{\mathbf{65}}$ ・ $\boxed{\mathbf{66}}$ ・ $\boxed{\mathbf{67}}$ **の解答群**

⓪ $-y$　① y　② 1　③ 2　④ $-\sqrt{y}$　⑤ $\sqrt{y}$

⑥ $-\dfrac{1}{\sqrt{y}}$　⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$　⑧ $\dfrac{1}{2}(\sqrt{y}-1)$　⑨ $\dfrac{1}{2}(\sqrt{y}+1)$

ⓐ $\dfrac{1}{2}(-\sqrt{y}+1)$　ⓑ $\sqrt{y}-1$

これより Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めると、$y \neq 0$ および $y \neq 1$ のとき

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ \boxed{\mathbf{68}} & (0 < y < 1) \\ \boxed{\mathbf{69}} & (1 < y) \end{cases}$$

を得る。

$\boxed{\mathbf{68}}$ ・ $\boxed{\mathbf{69}}$ **の解答群**

⓪ 0　① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $-\sqrt{y}$　④ $\sqrt{y}$　⑤ $-y$

⑥ y　⑦ $-\dfrac{1}{y}$　⑧ $\dfrac{1}{y}$　⑨ $\dfrac{1}{2}(\sqrt{y}-1)$　ⓐ $\dfrac{1}{2}(-\sqrt{y}+1)$

ⓑ $\sqrt{y}-1$　ⓒ $\sqrt{y}+1$　ⓓ $2\sqrt{y}$　ⓔ $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$　ⓕ $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$