問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 1 問 (60 点)	$\boxed{\mathbf{1}}$	10	⑦	$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$
	$\boxed{\mathbf{2}}$	3	⑦	$\dfrac{t^2-a}{2t}$
	$\boxed{\mathbf{3}}$	3	⑥	$\dfrac{t^2+a}{2t}$
	$\boxed{\mathbf{4}}$	3	ⓐ	$\dfrac{t^2+a}{2t^2}$
	$\boxed{\mathbf{5}}$	3	ⓒ	$\dfrac{1}{t}$
	$\boxed{\mathbf{6}}$	3	⑦	$\log(x+\sqrt{x^2+a})$
	$\boxed{\mathbf{7}}$	7	ⓐ	$\dfrac{5}{6}$
	$\boxed{\mathbf{8}}$	7	⑥	$\dfrac{1}{4}$
	$\boxed{\mathbf{9}}$	7	③	$\dfrac{1}{2}$
	$\boxed{\mathbf{10}}$	7	ⓐ	$\dfrac{3}{2}$
	$\boxed{\mathbf{11}}$	7	③	2

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第2問 (40点)	$\boxed{\mathbf{12}}$	6	②	$\dfrac{3\pi}{4}$
	$\boxed{\mathbf{13}}$	6	ⓔ	$\dfrac{4}{9\pi}$
	$\boxed{\mathbf{14}}$	6	ⓑ	$\dfrac{4}{3\pi}$
	$\boxed{\mathbf{15}}$	5	①	1
	$\boxed{\mathbf{16}}$	5	⑤	y
	$\boxed{\mathbf{17}}$	3	⑧	$(x+y)$
	$\boxed{\mathbf{18}}$	3	ⓐ	xy
	$\boxed{\mathbf{19}}$	3	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{20}}$	3	①	1

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第3問 (55点)	$\boxed{21}$	15	⑤	2
	$\boxed{22}$	4	⑥	3
	$\boxed{23}$	4	⑧	5
	$\boxed{24}$	4	⑥	3
	$\boxed{25}$	8	②	2
	$\boxed{26}$	8	③	3
	$\boxed{27}$	3	④	1
	$\boxed{28}$	1	④	1
	$\boxed{29}$	1	⑤	2
	$\boxed{30}$	1	⑥	3
	$\boxed{31}$	2	⑨	6
	$\boxed{32}$	2	③	0
	$\boxed{33}$	2	①	-2

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第4問 (45点)	$\boxed{34}$	15	②	3
	$\boxed{35}$	4	③	$a=0$
	$\boxed{36}$	2	⑤	$b=2$
	$\boxed{37}$	2	④	$c=1$
	$\boxed{38}$	7	⑧	$d=5$
	$\boxed{39}$	15	④	1

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 5 問 (50 点)	$\boxed{\mathbf{40}}$	5	②	$y=\dfrac{1}{2}x^2+c$
	$\boxed{\mathbf{41}}$	5	③	$y=\tan(x+c)$
	$\boxed{\mathbf{42}}$	5	④	$y=\log x+c$
	$\boxed{\mathbf{43}}$	5	②	$y=e^{x+1}$
	$\boxed{\mathbf{44}}$	5	ⓑ	$y=\sqrt{1-(x-1)^2}$
	$\boxed{\mathbf{45}}$	10	⓪	$y''+2y=0$
	$\boxed{\mathbf{46}}$	5	②	$y=\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x$
	$\boxed{\mathbf{47}}$	10	①	$y''+4y'+3y=60e^{2x}$

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 6 問 (50 点)	$\boxed{\mathbf{48}}$	10	①	$y=c_1e^{-ax}+c_2xe^{-ax}$
	$\boxed{\mathbf{49}}$	10	③	$(*1)$ が線形の微分方程式
	$\boxed{\mathbf{50}}$	2	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{51}}$	3	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{52}}$	10	⑥	z''
	$\boxed{\mathbf{53}}$	2	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{54}}$	3	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{55}}$	5	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{56}}$	5	⓪	ちょうど 1 個

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 7 問 (50 点)	$\boxed{\mathbf{57}}$	5	②	X^2
	$\boxed{\mathbf{58}}$	5	①	X
	$\boxed{\mathbf{59}}$	5	ⓒ	狭くなる
	$\boxed{\mathbf{60}}$	5	ⓓ	広くなる
	$\boxed{\mathbf{61}}$	10	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{62}}$	5	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{63}}$	5	①	1
	$\boxed{\mathbf{64}}$	5	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{65}}$	5	②	2

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 8 問 (50 点)	$\boxed{\mathbf{66}}$	7	①	$\dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$
	$\boxed{\mathbf{67}}$	7	⑥	$\dfrac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$
	$\boxed{\mathbf{68}}$	10	⑦	$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
	$\boxed{\mathbf{69}}$	5	③	${}_5\mathrm{C}_k \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-k}$
	$\boxed{\mathbf{70}}$	5	ⓒ	$\dfrac{40}{3^{10}}$
	$\boxed{\mathbf{71}}$	5	ⓔ	$\dfrac{100}{3^{10}}$
	$\boxed{\mathbf{72}}$	5	ⓒ	$\dfrac{40}{3^{10}}$
	$\boxed{\mathbf{73}}$	6	②	$\dfrac{5}{3^2}$

第 1 問　（配点 60 点）

問 1　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y$ より, 点 $(1, 2, 13)$ における接平面の方程式は

$$2(x-1) + 12(y-2) - (z-13) = 0$$

である．したがって接平面と直交するベクトルは,

$$\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

に平行なベクトルである．したがって答は ⑦ である．

問 2　$t = x + \sqrt{x^2+a}$ より $t - x = \sqrt{x^2+a}$ であるから, これの両辺を 2 乗して整理すれば $t^2 - 2tx = a$ を得る．したがって

$$x = \underline{\frac{t^2-a}{2t}}, \quad \sqrt{x^2+a} = t - x = t - \frac{t^2-a}{2t} = \underline{\frac{t^2+a}{2t}}, \quad \frac{dx}{dt} = \underline{\frac{t^2+a}{2t^2}}.$$

よって

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{2t}{t^2+a}\frac{t^2+a}{2t^2}dt = \int \underline{\frac{1}{t}}dt = \log|t| + C = \log\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

最後に, $\sqrt{x^2+a} > \sqrt{x^2} \geqq -x$ より $x + \sqrt{x^2+a} > 0$ であることに注意すれば, 絶対値記号を省いて良い．すなわち $I = \underline{\log(x + \sqrt{x^2+a})} + C$ となる．
したがって答は順に ⑦, ⑥, ⓐ, ⓒ, ⑦ である．

問 3　指数関数のマクローリン展開は $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ であるから

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+2)e^x \\
&= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \\
&= 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}\right)x^n \\
&= 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}x^n.
\end{aligned}$$

ゆえに, $n \geqq 1$ について $a_n = \dfrac{n+2}{n!}$ である．よって $a_3 = \underline{\dfrac{5}{6}},\ a_4 = \underline{\dfrac{1}{4}}$ である．
したがって答は順に ⓐ, ⑥ である．

問 4

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2-3x-1}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x)^2-(\sqrt{9x^2-3x-1})^2}{3x+\sqrt{9x^2-3x-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-(9x^2-3x-1)}{3x+\sqrt{9x^2-3x-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x+\sqrt{9x^2-3x-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{3x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{3x+1}{9x^2}}} = \underline{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

したがって答は ③ である.

問 5

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy &= \int_1^2\left\{\int_1^{x^2}\frac{x}{y^2}\,dy\right\}dx \\
&= \int_1^2\left[-\frac{x}{y}\right]_{y=1}^{y=x^2}dx \\
&= \int_1^2\left(-\frac{1}{x}+x\right)dx \\
&= \left[-\log|x|+\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \underline{\frac{3}{2}}-\log\underline{2}.
\end{aligned}
$$

したがって答は順に ⓐ, ③ である.

第 2 問　（配点 40 点）

問 1

$$A_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0,\ x \geqq 0\}, \quad A_2 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0,\ x < 0\}$$

とおくと，A_1 上 $\rho(x,y) = 2$, A_2 上 $\rho(x,y) = 1$ であるから

$$M = \iint_{A_1} 2dxdy + \iint_{A_2} 1dxdy = \underline{\frac{3\pi}{4}},$$

$$X = \frac{4}{3\pi}\left\{\iint_{A_1} 2x\,dxdy + \iint_{A_2} x\,dxdy\right\}, \quad Y = \frac{4}{3\pi}\left\{\iint_{A_1} 2y\,dxdy + \iint_{A_2} y\,dxdy\right\}$$

となる．ここで $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標に変換すると

$$\begin{aligned}
X &= \frac{4}{3\pi}\left\{2\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^1 (r\cos\theta) r\,dr\right\}d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left\{\int_0^1 (r\cos\theta) r\,dr\right\}d\theta\right\} \\
&= \frac{4}{3\pi}\left\{2\int_0^1 r^2\,dr\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta + \int_0^1 r^2 dr\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\,d\theta\right\} \\
&= \frac{4}{3\pi}\left\{2\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\cdot[\sin\theta]_0^{\pi/2} + \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\cdot[\sin\theta]_{\pi/2}^{\pi}\right\} = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{4}{9\pi}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{4}{3\pi}\left\{2\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^1 (r\sin\theta) r\,dr\right\}d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left\{\int_0^1 (r\sin\theta) r\,dr\right\}d\theta\right\} \\
&= \frac{4}{3\pi}\left\{2\int_0^1 r^2 dr\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta + \int_0^1 r^2 dr\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right\} \\
&= \frac{4}{3\pi}\left\{2\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\cdot[-\cos\theta]_0^{\pi/2} + \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\cdot[-\cos\theta]_{\pi/2}^{\pi}\right\} = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{4}{3\pi}}.
\end{aligned}$$

したがって答は順に ②, ⓔ, ⓑ である．

問 2

$u_x = 1$, $u_y = 1$, $v_x = y$, $v_y = x$ より

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= g_u(x+y,xy)u_x + g_v(x+y,xy)v_x \\
&= g_u(x+y,xy) + g_v(x+y,xy)y \\
&= g_u(x+y,xy)\cdot\underline{1} + g_v(x+y,xy)\cdot\underline{y}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
f_{xy}(x,y) &= (g_u)_y(x+y,xy) + (g_v y)_y(x+y,xy) \\
&= g_{uu}(x+y,xy)u_y + g_{uv}(x+y,xy)v_y \\
&\quad +(g_{vu}(x+y,xy)u_y + g_{vv}(x+y,xy)v_y)y + g_v(x+y,xy) \\
&= g_{uu}(x+y,xy) + g_{uv}(x+y,xy)\underline{(x+y)} + g_{vv}(x+y,xy)\underline{xy} \\
&\quad +g_u(x+y,xy)\cdot\underline{0} + g_v(x+y,xy)\cdot\underline{1}.
\end{aligned}$$

したがって答は順に ①, ⑤, ⑧, ⓐ, ⓪, ① である.

第 3 問　（配点 55 点）

問 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underline{2}$$

したがって答は ⑤ である．

問 2

(1)　$|A| = \underline{3}$

したがって答は ⑥ である．

(2)　E を 3 次の単位行列とすると，

$$|A^n - A^{n-1}| = |A|^{n-1}|A - E| = 3^{n-1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \underline{5}\cdot\underline{3}^{n-1}.$$

したがって答は順に ⑧, ⑥ である．

問 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

(1)　上の式より，左から $\underline{2}$ 番目のもの．したがって答は ② である．

(2)　$x + 2z = 0,\ y + z = 1$ を満たすものは

$$(-4, -1, 2),\ (-2, 0, 1),\ (0, 1, 0)$$

の $\underline{3}$ 個．したがって答は ③ である．

問 4 (1) $\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 1$ および $a > 0$ より，a の値は $\underline{1}$ である．したがって答は ④ である．

(2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_1 &= (\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3) \cdot \boldsymbol{u}_1 &= \underline{1} \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_2 &= (\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3) \cdot \boldsymbol{u}_2 &= \underline{2} \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_3 &= (\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3) \cdot \boldsymbol{u}_1 &= \underline{3} \end{aligned}$$

したがって答は順に ④, ⑤, ⑥ である.

(3)

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{u}_3 = \frac{6}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{0}{\sqrt{6}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{\underline{-2}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_3$$

したがって答は順に ⑨, ③, ① である.

第 4 問　（配点 45 点）

問 1　与えられた 4 つのベクトルを並べて行列をつくり，行基本変形を行う．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行基本変形で列ベクトルの間の線形関係は変わらないから，左側の行列の第 1 列，第 2 列，第 4 列のベクトルは 1 次独立で，第 3 列のベクトルは第 1 列および第 2 列のベクトルの和である．よって，部分空間の次元は $\underline{3}$ である．したがって答は ② である．

問 2　$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるから

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + ax_1x_2 \\ bx_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & c \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + cx_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

(1)　上式の第 1 項と第 3 項の各成分において x_1，x_2，x_1x_2 の係数を比較して，$a = \underline{0}$，$b = \underline{2}$，$c = \underline{1}$ を得る．したがって答は順に ③, ⑤, ④ である．

(2)　連立 1 次方程式 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が解をもつように d を定める．行基本変形

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & d \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & d-5 \end{array}\right)$$

から $d = \underline{5}$ であることがわかる．したがって答は ⑧ である．

問 3　A の固有値を計算する．固有多項式は

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -2 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+3)$$

である．　よって $\boxed{\textbf{39}} = \underline{1}$．したがって答は ④ である．

第 5 問　（配点 50 点）

問 1　まず，$y' = x$ は最も簡単なタイプの微分方程式で，このまま直接両辺を積分すれば

$$y(x) = \underline{\frac{1}{2}x^2 + c} \qquad (c : \text{任意定数})$$

を得る．

次に，微分方程式 $y' = 1 + y^2$ は変数分離形である．

$$\frac{1}{1+y^2}y' = 1$$

と書き直して両辺を積分すれば

$$\tan^{-1} y = x + c \qquad (c : \text{任意定数})$$

を得る．したがって

$$y(x) = \underline{\tan(x+c)}.$$

最後に，$x > 0$ で考えた微分方程式 $xy' = 1$ は

$$y' = \frac{1}{x}$$

と書き直して両辺を積分すれば,

$$y(x) = \underline{\log x + c} \qquad (c : \text{任意定数})$$

を得る．

したがって答は順に ②, ③, ④ である．

問 2　初期条件より y が恒等的に 0 である関数は解ではない．微分方程式 $y' = y$ は前問と同様に簡単に積分が出来て

$$\log |y(x)| = x + c \quad \text{すなわち} \quad |y(x)| = e^{x+c} \qquad (c : \text{任意定数})$$

となる．これより $y(x) = c'e^x$ $(c' = \pm e^c)$ を得る．初期条件 $y(-1) = 1$ を満たすためには $c' = e$ すなわち $c = 1$．したがって求める解は

$$y(x) = \underline{e^{x+1}}.$$

微分方程式 $x + yy' = 1$ は，このまま両辺を積分して

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = x + c \qquad (c : \text{任意定数})$$

を得るが，初期条件 $y(1) = 1$ を考慮すれば $c = 0$ が分かるので,

$$x^2 + y^2 = 2x.$$

求める解は初期条件より

$$y(x) = \underline{\sqrt{1-(x-1)^2}}.$$

したがって答は順に ②, ⓑ である.

問 3 (1) この問題を解くためには特性方程式とその解についての基本的知識だけでまにあう．実際，ここで与えられた関数を解とする微分方程式は，解答群に与えられた 2 階の定数係数微分方程式のうちから探すとなると，

$$\underline{y'' + 2y = 0}$$

しかない．実際に代入して確かめると解である．したがって答は ⓪ である.

(2) この問題はきわめて標準的である．よく知られているように，対応する同次 (斉次) 方程式は

$$y'' + 2y = 0$$

で，その特性方程式およびその解は

$$\lambda^2 + 2 = 0, \qquad \lambda = \pm\sqrt{2}i \qquad (i \text{ は虚数単位})$$

である．したがって一般解は A, B を任意定数として

$$y(x) = A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x$$

である．また，非同次微分方程式

$$y'' + 2y = \cos x$$

の特殊解の一つは，(例えば未定係数法によって)

$$y(x) = \cos x$$

であることが容易に分かる．したがって，与えられた微分方程式の一般解は

$$y(x) = \cos x + A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x$$

である．次に，初期条件

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

を考慮すれば,

$$A = 0,\ B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

すなわち,

$$y(x) = \underline{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x}$$

を知る．したがって答は ② である.

問 4　これも前問同様であるが，微分方程式が非同次であることと関数 $y(x) = 4e^{2x} - e^{-3x} + 5e^{-x}$ の各項の果たす役割が予め特定されていないところが少々面倒である．そこで，解答群にある 3 つの候補について特性方程式とその解を求めれば，

$$
\begin{aligned}
(\lambda+3)(\lambda-1) &= 0, & \lambda &= -3, 1, \\
(\lambda+3)(\lambda+1) &= 0, & \lambda &= -3, -1, \\
(\lambda-2)(\lambda+1) &= 0, & \lambda &= 2, -1
\end{aligned}
$$

である．このことと各微分方程式の右辺に注目すれば，第 1，第 3 の微分方程式は不適であることがわかる．したがって，可能性のあるものとしては第 2 のものだけが残る．そうだとすると，$4e^{2x}$ は $y'' + 4y' + 3y = 60e^{2x}$ の特殊解になっているはずであるが，それは実際に代入して確認される．したがって答は ① である．

第 6 問　（配点 50 点）

問 1　微分方程式

$$y'' + 2ay' + a^2y = 0$$

は 2 階の定数係数同次線形微分方程式で，その特性方程式は重解 $-a$ をもつ．したがって，その一般解は任意定数 c_1, c_2 を用いて

$$y(x) = \underline{c_1e^{-ax} + c_2xe^{-ax}}$$

で与えられる．したがって答は ① である．

問 2　ここで用いられているのは微分方程式の線形性である．実際，

$$y_1'' + 2ay_1' + a^2y_1 = f(x)$$

$$y_2'' + 2ay_2' + a^2y_2 = f(x)$$

を辺々引けば

$$y_0'' + 2ay_0' + a^2y_0 = 0$$

となり，しかも y_0 は

$$\begin{array}{lllllll} y_0(0) & = & y_1(0) - y_2(0) & = & \alpha - \alpha & = & \underline{0} \\ y_0'(0) & = & y_1'(0) - y_2'(0) & = & \beta - \beta & = & \underline{0} \end{array}$$

を満たす．
変換

$$z(x) = e^{ax}y(x)$$

によって

$$\begin{array}{lll} y & = & e^{-ax}z \\ y' & = & -ae^{-ax}z + e^{-ax}z' \\ y'' & = & a^2e^{-ax}z - 2ae^{-ax}z' + e^{-ax}z'' \end{array}$$

となるので，これらを $(**)$ に代入して，e^{-ax} が 0 でないことに注意すれば，

$$\underline{z''(x)} = 0$$

を得る．初期値に関しては明らかに

$$z(0) = y(0) = \underline{0},\ z'(0) = ay(0) + y'(0) = \underline{0}$$

であるので，関数 $z(x)$ は恒等的に $\underline{0}$ であるものしかない．
これは関数 $y_0(x)$ が恒等的に 0 であることを，すなわち $y_1(x), y_2(x)$ が完全に一致することを示している．$y_1(x), y_2(x)$ は $(*)$ の解であったので，$(*)$ には解が 2 つ以上は

存在しないことになる．つまり $(*)$ の解は多くとも 1 個である．一方 $(*)$ が解をもつことはわかっているので，$(*)$ の解はちょうど $\underline{1}$ 個である．
したがって答は順に ③, ⓪, ⓪, ⑥, ⓪, ⓪, ⓪, ⓪ である．

第 7 問　（配点 50 点）

問 1

$$\begin{aligned} E\left(\{X-E(X)\}^2\right) &= E\left(X^2-2XE(X)+\{E(X)\}^2\right) \\ &= E(X^2)-2E(X)E(X)+\{E(X)\}^2 \\ &= E(\underline{X^2})-\{E(\underline{X})\}^2 . \end{aligned}$$

したがって答は順に ②, ① である．

問 2　正規分布の母平均を区間推定する場合，信頼区間は信頼度と標本の大きさに依存する．信頼度を変えずに標本の大きさを大きくすると信頼区間は <u>狭くなり</u>，標本の大きさを変えずに信頼度を大きくすると信頼区間は <u>広くなる</u>．したがって答は順に ⓒ, ⓓ である．

問 3　X と Y の共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ は，$\bar{X}=E(X), \bar{Y}=E(Y)$ とすると，

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= E\left((X-\bar{X})(Y-\bar{Y})\right) \\ &= E(XY)-\bar{X}\bar{Y} \end{aligned}$$

となる．ここで X,Y が独立ならば $E(XY)=E(X)E(Y)=\bar{X}\bar{Y}$ であるから，共分散は $\underline{0}$ となる．したがって答は ⓪ である．

問 4　分布関数の定義より $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=\underline{0}$, $\lim_{x\to\infty} F_X(x)=\underline{1}$ である．したがって答は順に ⓪, ① である．

問 5　X,Y はそれぞれ平均 3, 分散 1 であるから $-Y$ の平均は -3, 分散は 1 となる．したがって $X-Y=X+(-Y)$ の平均は

$$(X \text{ の平均})+((-Y) \text{ の平均})=\underline{0}$$

である．また X,Y が独立であるから X と $-Y$ も独立であり, $X-Y$ の分散は

$$(X \text{ の分散})+((-Y) \text{ の分散})=\underline{2}$$

である．したがって答は順に ⓪, ② である．

第 8 問　（配点 50 点）

問 1　尤度関数

$$L(\lambda;\boldsymbol{x})=\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\right)\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_2}{\lambda}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_n}{\lambda}}\right)$$

の対数をとると，

$$l(\lambda;\boldsymbol{x})=-n\log\lambda-\underline{\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

となる．これを λ で微分すると，

$$\frac{dl}{d\lambda}(\lambda;\boldsymbol{x})=-\frac{n}{\lambda}+\underline{\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

となる．ここで $\dfrac{dl}{d\lambda}(\lambda;\boldsymbol{x})=0$ を解いて $\lambda=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$ を得る．増減を調べることにより $l(\lambda;\boldsymbol{x})$ は $\lambda=\underline{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i}$ で最大値をとることがわかる．よって最尤推定値 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$ である．

したがって答は順に ①, ⑥, ⑦ である．

問 2　二項分布 $B\left(5,\dfrac{2}{3}\right)$ の確率関数は

$$p(k)=P(X=k)=P(Y=k)=\underline{{}_5\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}p(0)&={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5&&=\frac{1}{3^5},\\p(1)&={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4&&=\frac{10}{3^5},\\p(2)&={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3&&=\frac{40}{3^5}\end{aligned}$$

となる．X,Y は独立だから同時確率はそれぞれの確率の積となる．よって

$$\begin{aligned}P(X=0,Y=2)&=p(0)p(2)&&=\underline{\frac{40}{3^{10}}},\\P(X=1,Y=1)&=p(1)p(1)&&=\underline{\frac{100}{3^{10}}},\\P(X=2,Y=0)&=p(2)p(0)&&=\underline{\frac{40}{3^{10}}}\end{aligned}$$

である．条件付き確率は

$$P(Y=1\mid X+Y=2)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)}$$

であるから,

$$\begin{aligned} P(Y=1 \mid X+Y=2) &= \left(\frac{100}{3^{10}}\right) \Big/ \left(\frac{40}{3^{10}}+\frac{100}{3^{10}}+\frac{40}{3^{10}}\right) \\ &= \frac{100}{180} = \frac{5}{9} = \underline{\frac{5}{3^2}} \end{aligned}$$

となる. したがって答は順に ③, ⓒ, ⓔ, ⓒ, ② である.