2004 年 12 月 21 日

工学系学部数学統一試験問題作成委員会

2004年
中国・四国地区大学工学系学部数学統一試験
解答，解説

目 次

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 1 問 (60 点)	**1**	8	⑦	2
	2	10	⑥	存在しない
	3	10	②	奇関数, 単調増加, 原点で傾き 2
	4	10	④	$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
	5	10	②	0
	6	12	ⓐ	$\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 2 問 (40 点)	**7**	6	②	2
	8	6	③	3
	9	6	③	3
	10 , **11** , **12**	10	⓪ , ① , ②	a, b, c
	13	6	ⓒ	abc
	14	6	⑥	6 個

- **10** 、 **11** 、 **12** は、3 箇所全てが正答通りにマークされたもののみに満点 (10 点) を与え、それ以外の場合には点を与えない。

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 3 問 (60 点)	**15**	5	①	1
	16	5	①	1
	17	10	②	2
	18	8	⑤	5
	19	8	②	2
	20	8	②	2
	21	6	⓪	0
	22	10	②	2

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 4 問 (40 点)	**23** **24**	$4+4$	①，③	$1 \pm \sqrt{3}$
	25	6	③	$-\sqrt{3}$
	26	6	②	$(-\lambda)^2$
	27 **28**	8	①，②	$-\frac{1}{2}\lambda^2\phi_M\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
	29 **30** **31**	$4+4+4$	①，③，②	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

- **23** **24** および **29** **30** **31** は箱が一つだけ正解でも得点を与える。内訳は配点欄に書いてあるとおり。
- **27** **28** は両方とも正解のときのみ得点を与える。

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 5 問 (60 点)	$\boxed{\mathbf{32}}$	10	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{33}}$	10	②	2
	$\boxed{\mathbf{34}}$	15	⑤	$\sqrt{3}e^{-2x} - \dfrac{3}{4}e^{2x}$
	$\boxed{\mathbf{35}}$	7	⑦	$-2z^2 - z + 1$
	$\boxed{\mathbf{36}}$	1	②	2
	$\boxed{\mathbf{37}}$	7	⑥	$\dfrac{1}{3}\log\dfrac{z+1}{2z-1}$
	$\boxed{\mathbf{38}}$	10	②	$\dfrac{x^3+1}{2x^3-1}$

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 6 問 (40 点)	$\boxed{\mathbf{39}}$	5	⑤	$2(p' - xp)$
	$\boxed{\mathbf{40}}$	5	⑥	$p'' - 2xp' + x^2p$
	$\boxed{\mathbf{41}}$	8	⑧	$e^{\frac{x^2}{2}}$
	$\boxed{\mathbf{42}}$	7	①	1
	$\boxed{\mathbf{43}}$	5	③	$x^2 - 1$
	$\boxed{\mathbf{44}}$	5	⑦	$c_1\cos x + c_2\sin x$
	$\boxed{\mathbf{45}}$	5	①	$x^2 - 3$

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 7 問 (60 点)	$\boxed{\mathbf{46}}$	4	⓪	$\times$
	$\boxed{\mathbf{47}}$	4	⓪	$\times$
	$\boxed{\mathbf{48}}$	4	①	○
	$\boxed{\mathbf{49}}$	4	①	○
	$\boxed{\mathbf{50}}$	6	②	2
	$\boxed{\mathbf{51}}$	5	ⓐ	e^{2x}
	$\boxed{\mathbf{52}}$	5	⑨	$\frac{3}{4}$
	$\boxed{\mathbf{53}}$	5	①	1
	$\boxed{\mathbf{54}}$	5	④	$-\frac{1}{2}$
	$\boxed{\mathbf{55}}$	5	⑤	$\frac{1}{4}$
	$\boxed{\mathbf{56}}$	5	⑦	$\frac{1}{6}$
	$\boxed{\mathbf{57}}$	4	⓪	0
	$\boxed{\mathbf{58}}$	4	①	1

問題番号	解答番号	配点	正解	参考
第 8 問 (40 点)	$\boxed{\textbf{59}}$	5	①	p
	$\boxed{\textbf{60}}$	5	①	p
	$\boxed{\textbf{61}}$	6	③	$p(1-p)$
	$\boxed{\textbf{62}}$	6	④	np
	$\boxed{\textbf{63}}$	6	⑦	$np(1-p)$
	$\boxed{\textbf{64}}$	6	ⓖ	2 項
	$\boxed{\textbf{65}}$	6	⑨	$\dfrac{5}{16}$

第１問，第２問
微分積分

第 1 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{6}}$ 〕　(配点 60 点)

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ. ただし log は自然対数とする.

問 1　次の値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\boxed{\mathbf{1}}.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ **の解答群**

⓪ $-\infty$　① ∞　② -3　③ -2　④ -1
⑤ 0　⑥ 1　⑦ 2　⑧ 3

解答　分母 $\sin x$ と分子 e^x-e^{-x} はともに $x\to 0$ の時 0 に収束するので, いわゆる $\frac{0}{0}$ の不定形である. 分母と分子はともに微分可能ゆえロピタルの定理が適用できるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(e^x-e^{-x})}{\frac{d}{dx}\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

従って答えは ⑦ である.

問 2　$(x,y)\to(0,0)$ のとき, 関数 $g(x,y)=\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ の極限は $\boxed{\mathbf{2}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ 0 である　① 1 である　② 2 である　③ 3 である
④ $\dfrac{1}{2}$ である　⑤ $\dfrac{1}{3}$ である　⑥ 存在しない

解答　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ $(r>0,\ 0\le\theta<2\pi)$ と置く. この時 $(x,y)\to 0$ とは $r\to+0$ を意味する. また

$$g(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{r\cos\theta-r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{r}=-\frac{\sqrt{2}\sin(\theta-\pi/4)}{r}$$

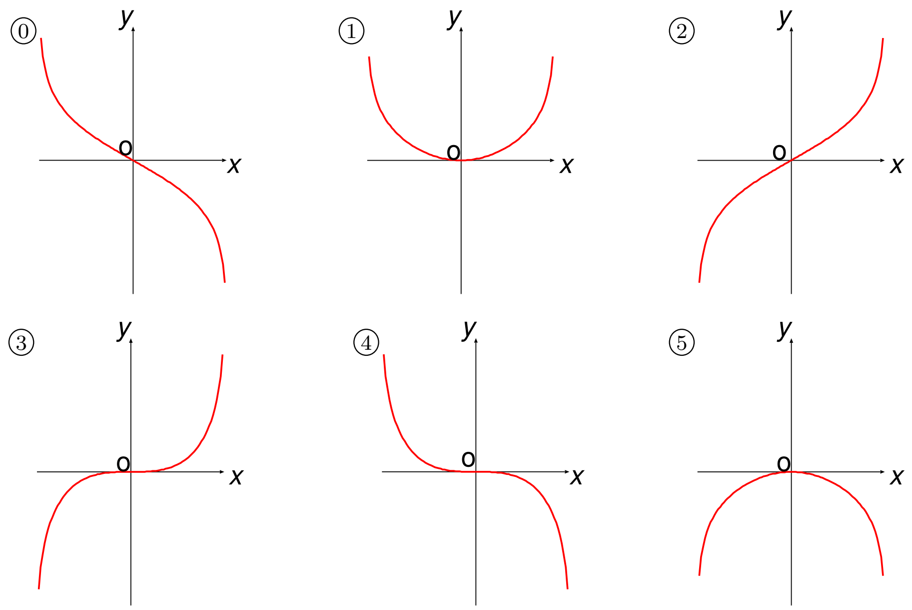
であるから, 近づく角度 θ を固定して $r\to+0$ とする時

$$\lim_{r\to+0}g(r\cos\theta,r\sin\theta)=\begin{cases}-\infty, & \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}\\ 0, & \theta=\frac{\pi}{4}\text{ or }\frac{5\pi}{4}\\ \infty, & \frac{5\pi}{4}<\theta<2\pi\text{ or }0\le\theta<\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

となり，極限値は θ により異なる．もし 2 変数関数としての極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ が存在するならば，近づく方向 θ に無関係な共通な値に収束する筈であるから，これは 2 変数関数としての極限が存在しないことを示している．以上より答は ⑥ である．

問 3　関数 $y = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$ のグラフの概形は $\boxed{\ \mathbf{3}\ }$ であり，マクローリン展開 ($x = 0$ におけるテイラー展開) は $\boxed{\ \mathbf{4}\ }$ である．ただし x 軸，y 軸の縮尺は適当に変更してある．

$\boxed{\ \mathbf{3}\ }$ の解答群



$\boxed{\ \mathbf{4}\ }$ の解答群

⓪ $2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$　① $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$　② $2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$　③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n+1}$

④ $2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$　⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n}$　⑥ $2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$　⑦ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$

解答　$y = f(x) = \log(1+x)/(1-x)$ とおくと

$$f(-x) = \log(1-x)/(1+x) = -\log(1+x)/(1-x) = -f(x)$$

が成り立つので奇関数である．従ってそのグラフは原点に関して対称であるが，解答群の ①，⑤ はそうなっていない．次に

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} > 0 \quad (-1 < x < 1)$$

ゆえ $f(x)$ は単調増加であるが，解答群の ⓪，①，④，⑤ はそうなっていない．

以上より，正解は ② または ③ のどちらかである．ここで $f'(0) = 2$ ゆえグラフの $x = 0$ での接線の傾きは正である．従って答は ② である．

次に初項 a 公比 $r(-1 < r < 1)$ の無限等比級数の和の公式

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

において，$a = 1$，$r = x^2$ と置けば

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = 2\{1 + x^2 + x^4 + \cdots\} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

が成り立つ．これを項別に積分して $f(0) = 0$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) \\ &= \int_0^x f'(t)\,dt = 2\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\,dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\,dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

が成り立つ．従って答えは ④ である．

問 4　次の積分値を求めよ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin 5x \cos^4 2x\,dx = \boxed{\mathbf{5}}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ **の解答群**

⓪ -2　① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ -2π　⑥ $-\pi$　⑦ π　⑧ 2π　⑨ $-\dfrac{\pi}{2}$　ⓐ $\dfrac{\pi}{2}$

解答　被積分関数 $|x|\sin 5x \cos^4 2x$ が奇関数，つまり $f(-x) = -f(x)$ を満たすことに注意しよう．そして積分区間が原点に関して対称であることより，その値は

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \int_{\pi}^{0} f(-y)\,(-dy) + \int_0^{\pi} f(x)\,dx \\ &= -\int_0^{\pi} f(y)\,dy + \int_0^{\pi} f(x)\,dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

従って答えは ② である．

問 5　xy 平面の集合 $\{(x,y):\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ を D で表すとき，

$$\iint_D e^{2x-y}\,dxdy = \boxed{\ \mathbf{6}\ }.$$

$\boxed{\ \mathbf{6}\ }$ の解答群

⓪ e^2+e+1　① e^2-e+1　② e^2+e-1　③ e^2-e-1

④ $-e^2-e-1$　⑤ $\frac{1}{2}e^2+e+1$　⑥ $e^2-\frac{1}{2}e+1$　⑦ $e^2+e-\frac{1}{2}$

⑧ $\frac{1}{2}e^2+e+\frac{1}{2}$　⑨ $\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e+1$　ⓐ $\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}$　ⓑ $\frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{2}$

解答　重積分を累次積分に直して計算すると

$$\begin{aligned}
&\iint_D e^{2x-y}\,dxdy \\
=\ &\int_0^1 \left\{\int_0^x e^{2x-y}\,dy\right\} dx \\
=\ &\int_0^1 e^{2x} \left\{\int_0^x e^{-y}\,dy\right\} dx \\
=\ &-\int_0^1 e^{2x}\left[e^{-y}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
=\ &\int_0^1 e^{2x}(1-e^{-x})\,dx \\
=\ &\int_0^1 (e^{2x}-e^x)\,dx \\
=\ &\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\right]_0^1 \\
=\ &\frac{1}{2}(e^2-e^0)-(e^1-e^0) \\
=\ &\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

である．よって答は ⓐ である．

第 2 問　〔解答番号 $\boxed{\textbf{7}}$ ～ $\boxed{\textbf{14}}$〕　（配点 40 点）

以下の空欄のうち $\boxed{\textbf{10}}$ から $\boxed{\textbf{13}}$ までには解答群から適当なものを選んでマークし，それ以外の空欄にはあてはまる数字をマークせよ．

a, b, c を正の定数とする．点 (x, y, z) が条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ を満たしながら動くとき，関数 $f(x, y, z)=xyz$ の最大値と最小値を求めるために，次のように考えた．

最大値または最小値をとる点を (x_0, y_0, z_0) とおけば

$$\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}+\frac{{z_0}^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

が成り立つ．ここで

$$g(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

とおく．このときラグランジュの未定乗数法によれば，点 (x_0, y_0, z_0) において

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g}{\partial z}$$

を満たす実数 λ が存在する．これらの式を実際に計算すると，それぞれ

$$y_0z_0=\boxed{\textbf{7}}\,\lambda\frac{x_0}{a^2},\quad x_0z_0=\boxed{\textbf{7}}\,\lambda\frac{y_0}{b^2},\quad x_0y_0=\boxed{\textbf{7}}\,\lambda\frac{z_0}{c^2} \tag{2}$$

である．(2) の 3 つの等式の両辺をそれぞれ x_0, y_0, z_0 倍した式と (1) より

$$\boxed{\textbf{8}}\,x_0y_0z_0=2\lambda \tag{3}$$

が分かる．

(i) $\lambda \neq 0$ のときは，(2) と (3) を組み合わせて

$$(x_0, y_0, z_0)=\left(\pm\frac{\boxed{\textbf{10}}}{\sqrt{\boxed{\textbf{9}}}}, \pm\frac{\boxed{\textbf{11}}}{\sqrt{\boxed{\textbf{9}}}}, \pm\frac{\boxed{\textbf{12}}}{\sqrt{\boxed{\textbf{9}}}}\right)$$

である．ただし複号 $(\pm)$ はすべての組み合わせをとる．このとき

$$f(x_0, y_0, z_0)=\pm\frac{\boxed{\textbf{13}}}{\boxed{\textbf{9}}\sqrt{\boxed{\textbf{9}}}}$$

が成り立つ．

(ii) $\lambda=0$ のときは，(1) と (2) を同時に満たす点 (x_0, y_0, z_0) は $\boxed{\textbf{14}}$ 個あり，これらすべての点で

$$f(x_0, y_0, z_0)=0$$

である.

(i), (ii) を合わせると最大値, 最小値はそれぞれ

$$\frac{\boxed{\mathbf{13}}}{\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}, \quad -\frac{\boxed{\mathbf{13}}}{\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}$$

である.

$\boxed{10}$ 〜 $\boxed{13}$ の解答群

⓪ a	① b	② c	③ a^2	④ b^2	⑤ c^2	⑥ ab
⑦ bc	⑧ ac	⑨ a^2b^2	ⓐ b^2c^2	ⓑ a^2c^2	ⓒ abc	ⓓ $a^2b^2c^2$

解答 点 (x_0, y_0, z_0) において

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda\frac{\partial g}{\partial z}$$

を実際に計算すると, それぞれ

$$y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0}{a^2}, \quad x_0z_0 = 2\lambda\frac{y_0}{b^2}, \quad x_0y_0 = 2\lambda\frac{z_0}{c^2}$$

である. 従って $\boxed{\mathbf{7}}$ の答は ② 2 である. 最初の等式の両辺を x_0 倍し, 次は y_0 倍, 最後は z_0 倍してからすべてを辺々加えれば, (1) より

$$3x_0y_0z_0 = 2\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 2\lambda$$

が分かる. 従って $\boxed{\mathbf{8}}$ の答は ③ 3 である.

(i) $\lambda \neq 0$ の時は上の等式より x_0, y_0, z_0 は 3 つとも 0 でないことに注意する. $2\lambda = 3x_0y_0z_0$ を (7) に代入して

$$y_0z_0 = \frac{3x_0^2y_0z_0}{a^2}, \quad x_0z_0 = \frac{3x_0y_0^2z_0}{b^2}, \quad x_0y_0 = \frac{3x_0y_0z_0^2}{c^2}$$

となるが, 各々の両辺を y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0 で割ると $x_0^2 = \frac{a^2}{3}$, $y_0^2 = \frac{b^2}{3}$ $z_0^2 = \frac{c^2}{3}$ が分かる. 従って (x_0, y_0, z_0) の候補として

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\pm a}{\sqrt{3}}, \frac{\pm b}{\sqrt{3}}, \frac{\pm c}{\sqrt{3}}\right)$$

の 8 点が得られた. 従って $\boxed{\mathbf{9}}$ の答は ③ 3 であり, $\boxed{\mathbf{10}}$, $\boxed{\mathbf{11}}$, $\boxed{\mathbf{12}}$ の答はそれぞれ ⓪ a, ① b, ② c である. これらの点が本当に $2\lambda = 3x_0y_0z_0$ のもとで

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2}{c^2} = 1$$
$$y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0}{a^2}, \quad x_0z_0 = 2\lambda\frac{y_0}{b^2}, \quad x_0y_0 = 2\lambda\frac{z_0}{c^2}$$

を満たすかどうかを実際に代入して検証すれば, 容易に 8 点すべてが満たすことが分かる. 従って複号 ($\pm$) は任意の組合せをとる.

またこの時

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\pm abc}{3\sqrt{3}}$$

ゆえ $\boxed{\mathbf{13}}$ の答は ⑥abc である.

(ii) $\lambda = 0$ の時は (7) は $y_0 z_0 = x_0 z_0 = x_0 y_0 = 0$ であるが, これは x_0, y_0, z_0 のうちの 2 つ以上が 0 であることを意味する. この事実を (1) と組み合わせれば

$$(x_0, y_0, z_0) = (-a, 0, 0), (a, 0, 0), (0, -b, 0), (0, b, 0), (0, 0, -c), (0, 0, c)$$

の 6 個の点が得られる. 従って $\boxed{\mathbf{14}}$ の答は ⑥ 6 個である. これらすべての点において $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ である.

a, b, c がすべて正であるこに注意して (i) と (ii) の場合で得られた極値の候補を並べると

$$-\frac{abc}{3\sqrt{3}} < 0 < \frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

となる. 従って関数 $f(x, y, z) = xyz$ は

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{-b}{\sqrt{3}}, \frac{-c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{-c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{-b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$$

の時, 最大値

$$\frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

をとり.

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{-b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{-c}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{-b}{\sqrt{3}}, \frac{-c}{\sqrt{3}}\right)$$

の時に最小値

$$-\frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

をとる.

第3問，第4問
線形代数

第 3 問　略解

問 1　(1)　与えられた行列の行列式を計算すると

$$-a^2+a+1-(-1+a^2+a)=-2a^2+2$$

となる.「与えられた行列が正則 $\Leftrightarrow$ その行列の行列式の値が 0 でない」 だから

$$a\neq -1 \quad \text{かつ} \quad a\neq 1 \quad (\boxed{\textbf{15}}, \boxed{\textbf{16}})$$

(2)　最初の 2 つのベクトルは明らかに 1 次独立であるから，与えられた 3 つのベクトルが張る部分空間の次元は 2 以上である．ゆえに，題意を満たす b を求めることは，これら 3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式を 0 とする b の値を求めることと同値である.

一方,

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & b\end{pmatrix}=-2b+4$$

なので，$b=2$ を得る ($\boxed{\textbf{17}}$).

(3)　行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\\ 1 & 1 & a^2\end{pmatrix}$$

と定義すれば，与えられた連立 1 次方程式は

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ b\end{pmatrix} \tag{1}$$

と記述できる.

(a)　$a\neq -1$ かつ $a\neq 1$ の場合 A は逆行列を有するので，(1) の解は $a=2,\ b=-4$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ b\end{pmatrix}$$

を計算して求めることができる．また，掃き出し法を利用すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 4 & \vdots & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

により，いずれの解法でも $x = 5$ ($\boxed{\mathbf{18}}$) を得る．

(b) $a = \pm 1$ の場合，ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

が 2 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のどちらかに一致することに注意すれば，$a = \pm 1$ で A^{-1} が逆行列を持たない本問の条件下において連立方程式が解を有するのは，ベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$$

が，上記の 2 つのベクトルの張る部分空間に属する場合に限られる．**問 1**(2) の結果から，それは $b = 2$ ($\boxed{\mathbf{19}}$) の場合であり，$a = 1$ の時与えられた連立方程式は

$$(x+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，$x + z = 2$ ($\boxed{\mathbf{20}}$), $y = 0$ ($\boxed{\mathbf{21}}$) となることがわかる．

問 2　与えられた 4 次正方行列の第 4 列に関して行列式を展開する．その値を d とすれば

$$\begin{aligned} d &= a \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} + a \cdot (-1)^{4+4} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \\ &= a(-2a^2+2) = -12 \quad (\text{上式第 1 項の 3 次正方行列の行列式は } 0) \end{aligned}$$

となることがわかる．ところが

$$a(-2a^2+2)=-12 \Leftrightarrow (a-2)\left\{(a+1)^2+1\right\}=0$$

であるから，条件を満たす実数解 a は $a=2$ （$\boxed{\mathbf{22}}$）となる．

第 4 問　略解

問 1　行列 M の固有値が λ で，対応する固有ベクトルが $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ であれば

$$M\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \Leftrightarrow (\lambda I - M)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

で，この式が非自明解 ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) を持つための必要十分条件は $\lambda I - M$ が逆行列を持たないこと，すなわち

$$\phi_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = 0$$

である．与えられた行列 M についてこの行列式を計算すれば

$$\det(\lambda I - M) = \lambda^2 - 2\lambda - 2$$

となり，これを 0 と等置した 2 次方程式を解くと，固有値として

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{3} \ (\boxed{\textbf{23}}, \boxed{\textbf{24}})$$

が得られる．

次に，2 つの固有値のうち正のものは $1 + \sqrt{3}$ であるから，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおいて $M\boldsymbol{v} = (1 + \sqrt{3})\boldsymbol{v}$ を成分計算すると，

$$x = -\sqrt{3}\,y$$

であることがわかるが，この式において $y = 1$ とすれば

$$x = -\sqrt{3} \ (\boxed{\textbf{25}})$$

となる．

問 2　まず，

$$\det M = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = -2$$

である．誘導式に従えば

$$\begin{aligned}
\phi_{M^{-1}}(\lambda) &= \det(-\lambda M^{-1}) \cdot \det\left(\frac{1}{\lambda}I - M\right) \\
&= \lambda^2 \det(M^{-1}) \cdot \phi_M\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{\det M}\,\lambda^2\,\phi_M\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\lambda^2 \phi_M\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\boxed{\textbf{26}} \sim \boxed{\textbf{28}})
\end{aligned}$$

となるから，行列 M^{-1} の固有値は行列 M の固有値の逆数となることがわかる (納得しにくければ，$\phi_A(\lambda)$ を因数分解したものの λ を λ^{-1} に置き換えて考えると良い)．また以上の誘導からわかるように，この事実は行列の次数によらず成立する．

以上より，M^{-1} の固有値のうち絶対値の大きなものは，M の固有値のうち絶対値の小さいもの $1-\sqrt{3}$ の逆数であるから，

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{1-\sqrt{3}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad (\boxed{\mathbf{29}} \sim \boxed{\mathbf{31}})$$

が求めるべき答えとなる．

第５問，第６問
微分方程式

第５問の解答

問１　関数 y が微分方程式 $y'' + 4y = 0$ の解であれば, x の関数 $F(x) = 4y^2 + (y')^2$ に対して合成関数の微分法を用いると

$$F'(x) = \left\{4y^2 + (y')^2\right\}' = 8yy' + 2y'y'' = 2y'(y'' + 4y) = 0$$

となることがわかる．したがって, $F(x)$ は定数関数であり, 初期条件から

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = F(0) = 4(y(0))^2 + (y'(0))^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = 2$$

が得られる．

問２　微分方程式 $y'' - y' - 6y = 3e^{2x}$ に対して, 対応する同次方程式 $y'' - y' - 6y = 0$ の一般解は $y_h = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$（$c_1, c_2$ は任意定数）であり, $y_p = -\frac{3}{4}e^{2x}$ は特殊解の 1 つである．よって, 一般解は $y = y_h + y_p = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} - \frac{3}{4}e^{2x}$ である．したがって, 解答群のうちで解になるものは $\sqrt{3}e^{-2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$ である．

問３　初期値問題 $x^2y' + 2y^2 = x^2, \quad y(1) = 2$ を（ $x = 1$ の十分近くで）解くために, $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ とおくと, z を未知関数とする初期値問題 $xz' = -2z^2 - z + 1, \quad z(1) = \dfrac{y(1)}{1} = 2$ が得られ, $\displaystyle\int_2^z \frac{dz}{-2z^2 - z + 1} = \int_1^x \frac{dx}{x}$ となる．ここで, 右辺については, $x = 1$ の十分近くでは x は正であることに注意すれば $\displaystyle\int_1^x \frac{dx}{x} = \log|x| = \log x$ であり, 左辺については被積分関数を部分分数に分解して計算すれば

$$\begin{aligned}
\int_2^z \frac{dz}{-2z^2 - z + 1} &= \int_2^z -\frac{1}{(2z-1)(z+1)}\,dz \\
&= \int_2^z \left\{-\frac{2}{3(2z-1)} + \frac{1}{3(z+1)}\right\} dz \\
&= \left[\frac{1}{3}\log\frac{z+1}{2z-1}\right]_2^z \quad = \frac{1}{3}\log\frac{z+1}{2z-1}
\end{aligned}$$

である（$x = 1$ の十分近くでは z は $z(1) = 2$ の近くを動くので, $\dfrac{z+1}{2z-1}$ は正であると考えてよい）．したがって, $\left(\dfrac{z+1}{2z-1}\right)^{\frac{1}{3}} = x$ であるから, これを z について解くと, $z = \dfrac{x^3+1}{2x^3-1}$ であり, $y = xz = \dfrac{(x^3+1)x}{2x^3-1}$ が得られる．

第６問の解答

微分方程式

$$y'' - 2xy' + x^2 y = (x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}$$

の一般解を求めるために $y(x) = p(x)z(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + x^2 y &= (pz)'' - 2x(pz)' + x^2 pz \\ &= pz'' + 2(p' - xp)z' + (p'' - 2xp' + x^2 p)z \end{aligned}$$

となる. ここで, 関数 p をうまく選んで z' の係数が 0 になるようにするためには, p として微分方程式 $2(p'-xp)=0$ の解のひとつである $p(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$ をとればよい. すると,

$$p'' - 2xp' + x^2 p = (e^{\frac{x^2}{2}})'' - 2x(e^{\frac{x^2}{2}})' + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

であるから, z に関する微分方程式

$$e^{\frac{x^2}{2}} z'' + e^{\frac{x^2}{2}} z = (x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}$$

が得られる. $e^{\frac{x^2}{2}}$ は値として 0 をとらないので, この方程式は

$$z'' + z = x^2 - 1$$

となり, これを解けば, c_1, c_2 を任意定数として

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 3$$

が得られる. したがって, もとの微分方程式の一般解は

$$y = pz = e^{\frac{x^2}{2}}(c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 3)$$

である.

第７問，第８問
確率・統計

第７問解答

問１

1. 仮説検定を行って帰無仮説が棄却されなかったというのは，得られた標本からは仮説が誤りであると「判断」することができないということである．また帰無仮説が棄却されたとしても，それは得られた標本から仮説が誤りであると「判断」したということである．このように仮説検定の結果は仮説が真に正しいか誤りかということとは異なる（第１種，第２種の誤り）．

2. $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ なので A と B は独立ではない（従属）．$A \cap B = \emptyset$ のとき事象 A, B は互いに背反であると言われ，同時には起こらない．２つの事象が独立であるとは，直感的には一方の事象が起こっても起こらなくても，他方の事象が起こる確率に変化が及ばないことを意味するが，A, B は互いに背反である場合，一方が起これば他方は決して起こらないので，直感的にも独立ではないことはすぐに分かる．

3. 同じデータを使う場合，信頼度を大きくすると，信頼区間は広くなる．

4. 一般に $E(\dfrac{1}{X}) = \dfrac{1}{E(X)}$ は成り立たない．それどころか，$E(X)$ の値が存在しても $E(\dfrac{1}{X})$ は存在するとは限らない．

問２

確率密度関数は $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ をみたさなければならない．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} Ce^{2x}dx = \frac{C}{2}$$

であるから，$C = 2$ を得る．これから，$F(x)$ は $x \leq 0$ のとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 2e^{2x}dx = e^{2x}.$$

したがって，$P(X > -\log 2) = 1 - F(-\log 2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ を得る．また，$x > 0$ のとき，$F(x) = F(0) = 1$ である．さらに，期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は，

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 2\int_{-\infty}^{0} x\,e^{2x}dx = -\frac{1}{2},$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \{E(X)\}^2 = 2\int_{-\infty}^{0} x^2\,e^{2x}dx - \Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

となる．

問３

$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} = \frac{1}{6}.$

問4

期待値は $E(Y) = \frac{E(X)-1}{2} = 0$ であり，分散は

$$V(Y) = V\left(\frac{X-1}{2}\right) = V\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{V(X)}{4} = 1.$$

第８問解答

X_k は 1 と 0 の値をとる離散型の確率変数なので期待値は $E(X_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$ となる．また，$X_k^2 = X_k$ であるから $E(X_k^2) = E(X_k) = p$ で，これから分散は $V(X_k) = E(X_k^2) - \{E(X_k)\}^2 = p - p^2 = p(1-p)$ となる．

これから，$E(S) = n\,E(X_k) = np, V(S) = n\,V(X_k) = np(1-p)$ が得られる．ところで S は２項分布 $B(n,p)$ にしたがうので，$p = \frac{1}{2}$, $n = 5$ とすると，$P(S=3) = {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$ を得る．