2006 年度 工学系数学統一試験

問題の解説

微分積分　(第1問, 第2問)

第 1 問　(微分積分 1/2)　〔解答番号 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{8}$ 〕（配点 50 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

問 1　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = \boxed{\mathbf{1}}$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \boxed{\mathbf{2}}$ である.

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ $\frac{1}{2}$　⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ ∞　⑧ $-\infty$

解説　分母 $\sqrt{x}$, x^2 と分子 $\log x$, e^x はともに $x \to \infty$ の時 ∞ に発散するので, いわゆる $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形である. 分母と分子はともに微分可能ゆえロピタルの定理が適用できるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(\log x)}{\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty.$$

したがって答は順に ⓪, ⑦ である.

問 2　$\displaystyle\int_1^{e^2} x\log x\,dx = \boxed{\mathbf{3}}$ である.

$\boxed{3}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$	① $\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$	② $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$	④ $\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}$	⑤ $\frac{3}{4}e^4-\frac{1}{4}$
⑥ $\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$	⑦ $\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$	⑧ $-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$
⑨ $e^4-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$	ⓐ $e^4-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$	ⓑ $\frac{5}{4}e^4-\frac{1}{4}$

解説　部分積分の公式を用いて計算すると

$$\int_1^{e^2} x\log x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2}\frac{x^2}{2}\frac{d}{dx}(\log x)\,dx = e^4 - \int_1^{e^2}\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \ e^4 - \frac{1}{2}\int_1^{e^2} x\,dx = e^4 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e^2} = \frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}.$$

したがって答えは ④ である．

問 3　関数 $f(x) = 2^x$ の導関数は $f'(x) = \boxed{\mathbf{4}}\,2^x$ である．したがって $x = 0$ における $f(x)$ のテイラー展開 (マクローリン展開) は

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boxed{\mathbf{5}}}{n!} x^n$$

で与えられる．

$\boxed{\mathbf{4}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ 2^n	⑤ $\dfrac{1}{2^n}$
⑥ e^2	⑦ e^{2n}	⑧ $\log 2$	⑨ $\dfrac{1}{\log 2}$	ⓐ $(\log 2)^n$	ⓑ $\dfrac{1}{(\log 2)^n}$
ⓒ $2x$	ⓓ $\dfrac{x}{2}$	ⓔ $\dfrac{x}{\log 2}$			

解説　$f(x) = 2^x$ の導関数は $f'(x) = (\log 2) \times 2^x$ である．これより帰納的に $f(x)$ の n 階導関数が $f^{(n)}(x) = (\log 2)^n \times 2^x$ を満たし，さらに $f^{(n)}(0) = (\log 2)^n$ であることがわかる．これをテイラー展開 (マクローリン展開) の公式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

に代入して

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 2)^n}{n!} x^n$$

が成り立つ．したがって答えは順に ⑧, ⓐ である．

また $2^x = e^{x\log 2}$ であることと e^x のマクローリン展開は $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ であることを用いても

$$2^x = e^{x\log 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\log 2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 2)^n}{n!} x^n$$

となることがわかる．

問 4　不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ を求める．$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{1+\cos x} = \boxed{\;\mathbf{6}\;}, \qquad \frac{dx}{dt} = \boxed{\;\mathbf{7}\;}$$

である．したがって $I = \boxed{\;\mathbf{8}\;} + C$ (C は積分定数) である．

$\boxed{\;6\;}$, $\boxed{\;7\;}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1+t}{1-t}$　① $\dfrac{1-t}{1+t}$　② $\dfrac{2}{1+t^2}$　③ $\dfrac{1+t^2}{2}$　④ $\dfrac{2t}{1+t^2}$

⑤ $\dfrac{1+t^2}{2t}$　⑥ $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　⑦ $\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

$\boxed{\;8\;}$ の解答群

⓪ $\sin x$　① $\cos x$　② $\tan x$　③ $\sin\dfrac{x}{2}$　④ $\cos\dfrac{x}{2}$　⑤ $\tan\dfrac{x}{2}$

解説　三角関数の間の関係式を用いると

$$\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1,$$
$$1+\tan^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

であることより

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$$

である．また $t = \tan\dfrac{x}{2}$ より，$X = \dfrac{x}{2}$ とおき合成関数の微分を用いると

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dX}\frac{dX}{dx} = \frac{d}{dX}(\tan X)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}.$$

さらに逆関数の微分を用いて

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{1+t^2}.$$

ゆえに積分変数の変換を行うと

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{1+\cos x} \\ &= \int \frac{1+t^2}{2} \frac{dx}{dt}\, dt = \int \frac{1+t^2}{2} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int dt = t + C = \tan\frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

したがって答えは順に ③, ②, ⑤ である.

第 2 問 (微分積分 2/2) 〔解答番号 $\boxed{9}$ 〜 $\boxed{15}$ 〕(配点 50 点)

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

問 1 xy 平面において原点からの距離 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ を x, y の関数とみなすとき, 原点以外の点において, $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \boxed{9}$ であり, $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \boxed{10}$ である.

$\boxed{9}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ① $\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ② $\dfrac{x}{2(x^2+y^2)}$ ③ $-\dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$

④ $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ ⑥ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ⑦ $\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

⑧ $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ⑨ $\dfrac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$\boxed{10}$ の解答群

⓪ r ① $(x+y)\,r$ ② $\dfrac{3}{r}$ ③ $-\dfrac{3}{r}$ ④ $\dfrac{2}{r}$

⑤ $-\dfrac{2}{r}$ ⑥ $\dfrac{1}{r}$ ⑦ $-\dfrac{1}{r}$ ⑧ $\dfrac{2}{r^2}$ ⑨ $-\dfrac{2}{r^2}$

ⓐ $\dfrac{2}{r} + \dfrac{x+y}{r^2}$ ⓑ $\dfrac{2}{r} - \dfrac{x+y}{r^2}$

解説 $X = x^2+y^2$ とおくと, $r = \sqrt{X}$ ゆえ合成関数の偏微分に関する連鎖公式を用いると

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dr}{dX}\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{d}{dX}(\sqrt{X})\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{1}{2\sqrt{X}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}.$$

同様にして

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}.$$

ゆえに

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{2}{r} - \frac{x^2+y^2}{r^3} = \frac{2}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

したがって答えは順に ⑥, ⑥ である.

問 2 xy 平面上の集合 D を $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y \geqq 0,\ y \geqq -\sqrt{3}x,\ x^2+y^2 \leqq 4\right\}$ で定める．
重積分

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{8}(x^2+y^2)\right)\,dxdy$$

の値を求めるために $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ と変数変換を行う．
このとき原点を除けば $(x,y) \in D$ であるための必要十分条件は

$$0 < r \leqq \boxed{\mathbf{11}} \quad \text{かつ} \quad \boxed{\mathbf{12}} \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{13}}$$

である．そこで

$$E=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ 0 \leqq r \leqq \boxed{\mathbf{11}},\ \boxed{\mathbf{12}} \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{13}}\right\}$$

とおけば

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{8}(x^2+y^2)\right)\,dxdy=\iint_E \boxed{\mathbf{14}}\,drd\theta=\boxed{\mathbf{15}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{11}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

$\boxed{\mathbf{12}}$, $\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{3}$　④ $\frac{\pi}{2}$　⑤ $\frac{2\pi}{3}$
⑥ $\frac{3\pi}{4}$　⑦ $\frac{5\pi}{6}$　⑧ π　⑨ $\frac{7\pi}{6}$　ⓐ $\frac{5\pi}{4}$　ⓑ $\frac{4\pi}{3}$
ⓒ $\frac{3\pi}{2}$　ⓓ $\frac{5\pi}{3}$　ⓔ $\frac{7\pi}{4}$　ⓕ $\frac{11\pi}{6}$　ⓖ 2π

$\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ $\cos\left(\frac{\pi r}{8}\right)$　① $\cos\left(\frac{\pi r^2}{8}\right)$　② $r\cos\left(\frac{\pi r}{8}\right)$　③ $r\cos\left(\frac{\pi r^2}{8}\right)$

$\boxed{15}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{3}$	① $\dfrac{2}{3}$	② 1	③ $\dfrac{4}{3}$	④ 2	⑤ $\dfrac{8}{3}$
⑥ $\dfrac{\pi}{3}$	⑦ $\dfrac{2\pi}{3}$	⑧ π	⑨ $\dfrac{4\pi}{3}$	ⓐ 2π	ⓑ $\dfrac{8\pi}{3}$
ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	ⓓ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	ⓔ $\sqrt{2}$	ⓕ $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$	ⓖ $2\sqrt{2}$	

解説　集合 D は原点中心, 半径 2 の円板の上半分と直線 $y=-\sqrt{3}x$ より上の部分との共通部分だから, 原点を除けば (x,y) が D に属する為には

$$0<r\leqq 2 \quad \text{かつ} \quad 0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi.$$

であることが必要十分である. ここで重積分における, 極座標による変数変換の公式を用いると

$$\iint_D \cos\frac{\pi}{8}(x^2+y^2)\,dxdy = \iint_E (\cos(\frac{\pi r^2}{8}))r\,drd\theta = \int_0^{2\pi/3}\left\{\int_0^2 r\cos\left(\frac{\pi r^2}{8}\right)\,dr\right\}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi/3}\left[\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi r^2}{8}\right)\right]_0^2\,d\theta = \int_0^{2\pi/3}\frac{4}{\pi}\,d\theta = \frac{4}{\pi}\frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}.$$

したがって答えは順に ②, ⓪, ⑤, ③, ⑤ である.

線形代数　(第3問, 第4問)

第 3 問　(線形代数 $1/_2$)　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{16}}$ ～ $\boxed{\mathbf{28}}$ 〕（配点 60 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

問 1　行列 A, B の積 AB を $A \times B$ と表すことにする. このとき $\boxed{\mathbf{16}} \times \boxed{\mathbf{17}}$ はスカラーになる. また $\boxed{\mathbf{18}} \times \boxed{\mathbf{19}}$ と $\boxed{\mathbf{20}} \times \boxed{\mathbf{21}}$ はともに 2 次正方行列になるが, $\boxed{\mathbf{18}} \times \boxed{\mathbf{19}}$ は正則行列であり, $\boxed{\mathbf{20}} \times \boxed{\mathbf{21}}$ は正則行列ではない.

$\boxed{\mathbf{16}}$ ～ $\boxed{\mathbf{21}}$ の解答群

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　⑧ $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

解説　m 行 n 列の行列 A と p 行 q 列の行列 B の積 $A \times B$ が作れるためには $n = p$ が必要十分条件であり, このとき積 $A \times B$ は m 行 q 列になる. 従って $A \times B$ がスカラー, つまり 1 行 1 列の行列になるには A, B がそれぞれ 1 行 n 列, n 行 1 列の行列となることが必要十分である. このような組み合わせを解答群の中から探せば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

のみが適する. 従って $\boxed{\mathbf{16}}$ の答えは ① であり $\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ⑤ である.

次に $A\times B$ が 2 行 2 列になるには A, B がそれぞれ 2 行 n 列, n 行 2 列の行列となることが必要十分である．このような組み合わせを解答群の中から探せば

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

このとき

$$A\times B=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 4 & -7\end{pmatrix},\quad |A\times B|=-4\neq 0$$

の場合と

$$A=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}\quad \text{このとき}\quad A\times B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad |A\times B|=0$$

の場合である．従って $\boxed{\mathbf{18}}$, $\boxed{\mathbf{19}}$ の答はそれぞれ ⓪, ⑥ であり $\boxed{\mathbf{20}}$, $\boxed{\mathbf{21}}$ の答はそれぞれ ⑤, ① である．

問 2 行列式 $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{22}}$ である．

$\boxed{\mathbf{22}}$ **の解答群**

⓪ -6 ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1 ⑥ 0
⑦ 1 ⑧ 2 ⑨ 3 ⓐ 4 ⓑ 5 ⓒ 6

解説　以下のような式変形を行い計算する.

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{3 行に 1 行を加える} \\
=\ &\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{1 列で展開} \\
=\ &-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{3 行に 1 行を加える} \\
=\ &-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{1 列で展開} \\
=\ &-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
=\ &-2
\end{aligned}
$$

従って答は ④ である.

問 3　xy 平面において行列 $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 (線形変換) を行う. この変換によって大きさ (長さ) が変化しても方向が変わらない単位ベクトルは

$$
\frac{1}{\sqrt{\boxed{\mathbf{23}}}} \begin{pmatrix} -\boxed{\mathbf{24}} \\ \boxed{\mathbf{25}} \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\boxed{\mathbf{26}}}} \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{27}} \\ \boxed{\mathbf{28}} \end{pmatrix}
$$

である.

$\boxed{\mathbf{23}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{28}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7
⑧ 9　⑨ 11　ⓐ 13　ⓑ 15　ⓒ 17

解説　行列 A によって表される 1 次変換によって方向が変わらない単位ベクトルとは, あるスカラー λ に対して $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たし, さらに $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のことである. $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となるが, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ であるから, $A - \lambda E$ は正則でない (つまり逆行列を持たない). 従って $|A - \lambda E| = 0$ が成り立つ. よって

$$
\begin{aligned}
0 &= |A - \lambda E| \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(6-\lambda) - 6 \\
&= \lambda^2 - 11\lambda + 24 \\
&= (\lambda - 3)(\lambda - 8)
\end{aligned}
$$

となり $\lambda = 3,\ 8$ である.

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおく. $\lambda = 3$ のときは, $(A - 3E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ より

$$
\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となり $2x_1 + 3x_2 = 0$ である. これと $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$ より

$$
\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

である.

$\lambda = 8$ のときは $(A - 8E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ より

$$
\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となり $x_1 = x_2$ である. これと $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$ より

$$
\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

である.

以上より, 解答群の中から適するものを選べば $\boxed{\mathbf{23}}$, $\boxed{\mathbf{24}}$, $\boxed{\mathbf{25}}$ の解はそれぞれ ⓐ, ③, ② であり, $\boxed{\mathbf{26}}$, $\boxed{\mathbf{27}}$, $\boxed{\mathbf{28}}$ の解はそれぞれ ②, ①, ① である.

第 4 問 (線形代数 $2/_2$)　〔解答番号 $\boxed{\textbf{29}}$ 〜 $\boxed{\textbf{36}}$ 〕（配点 40 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

(注意) $\mathbb{R}^4$ は 4 次元実数ベクトル空間を表す.

整数 a を含む行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 4 & 2 & -2 & a+1 \end{pmatrix}$$

を考える.

問 1　行列 A は $a = \boxed{\textbf{29}}$ のとき階数が 2 となり, $a \neq \boxed{\textbf{29}}$ のとき階数が $\boxed{\textbf{30}}$ となる.

$\boxed{\textbf{29}}$, $\boxed{\textbf{30}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

解説　階数を求めるために掃き出し法で階段行列に変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 4 & 2 & -2 & a+1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2\text{ 行} - 2\times 1\text{ 行} \\ 3\text{ 行} - 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行} - 4\times 1\text{ 行} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & a \\ 0 & 6 & -6 & a+1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3\text{ 行} - 2\text{ 行} \\ 4\text{ 行} - 2\times 2\text{ 行} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ 4\text{ 行} - 3\text{ 行} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって $a=1$ のとき階数が 2 となり, $a \neq 1$ のとき階数が 3 となる. 従って $\boxed{\textbf{29}}$ の答は ① である.

問 2　行列 A は 4 次元実数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ を $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ 2x+y-z+w \\ x+2y-2z+a\,w \\ 4x+2y-2z+(a+1)\,w \end{pmatrix}$ に写す.

(1)　$a = \boxed{\textbf{29}}$ のとき, 集合　$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{\textbf{31}} \\ \boxed{\textbf{32}} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \boxed{\textbf{33}} \\ \boxed{\textbf{34}} \end{pmatrix}$

によって張られる 2 次元ベクトル空間となる.

一方　$a \neq \boxed{\textbf{29}}$ のとき, 集合 V は $\boxed{\textbf{35}}$.

(2) $a=\boxed{\mathbf{29}}$ のとき, ベクトル $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ を満たす 4 次元実数ベクトル $\boldsymbol{x}$ がなす集合を考えると, これは $\boxed{\mathbf{36}}$.

$\boxed{\mathbf{31}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{34}}$ の解答群

⓪ -6　① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1　⑥ 0
⑦ 1　⑧ 2　⑨ 3　ⓐ 4　ⓑ 5　ⓒ 6

$\boxed{\mathbf{35}}$, $\boxed{\mathbf{36}}$ の解答群

⓪ 空集合となる
① 空集合ではないが, ベクトル空間にならない
② 1 次元ベクトル空間となる
③ 2 次元ベクトル空間となる
④ 3 次元ベクトル空間となる
⑤ 4 次元ベクトル空間となる
⑥ 5 次元ベクトル空間となる

解説　(1) について. 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解を求めるには掃き出し法を用いて計算を行えば良いが, これは結局, 問 1 の掃き出し法とまったく同じ計算をすることになる. そこで

最終の結果のみを書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 4 & 2 & -2 & a+1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2\text{ 行} - 2\times 1\text{ 行} \\ 3\text{ 行} - 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行} - 4\times 1\text{ 行} \end{array}$$

$\longrightarrow$ 途中は省略

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．$a = 1$ のときは上式より $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ となり，$x_3 = -x_1 + x_2$, $x_4 = -3x_2 + 3x_3 = -3x_1$ を得る．従って $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ のときは $x_3 = -1$, $x_4 = -3$ となり $\boxed{\mathbf{31}}$, $\boxed{\mathbf{32}}$ の答はそれぞれ ⑤, ③ である．また $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ のときは $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ となり $\boxed{\mathbf{33}}$, $\boxed{\mathbf{34}}$ の答はそれぞれ ⑦, ⑥ である．

$a \neq 1$ のときは $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ に $x_4 = 0$ が加わり，これらの式より $x_2 = c$ とおくと $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = c$, $x_4 = 0$ となり

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

従って $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の全体は 1 次元空間をなし，$\boxed{\mathbf{35}}$ の答は ② である．

(2) について．$a = 1$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求める為に掃き出し法を拡大係数行

列に用いて変形すると

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\
2 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\
1 & 2 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\
4 & 2 & -2 & 2 & \vdots & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
2\text{ 行} - 2 \times 1\text{ 行} \\
3\text{ 行} - 1\text{ 行} \\
4\text{ 行} - 4 \times 1\text{ 行}
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\
0 & 3 & -3 & 1 & \vdots & -2 \\
0 & 3 & -3 & 1 & \vdots & -1 \\
0 & 6 & -6 & 2 & \vdots & -4
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
\\
3\text{ 行} - 2\text{ 行} \\
4\text{ 行} - 2 \times 2\text{ 行}
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\
0 & 3 & -3 & 1 & \vdots & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0
\end{pmatrix}
$$

上式の第 3 行は $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$ を意味するが, この式を満たす $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ は存在しない. よって $\boxed{\mathbf{36}}$ の答は ⓪ である.

常微分方程式　(第５問, 第６問)

第５問　(常微分方程式 $1/_2$)

〔解答番号 $\boxed{\textbf{37}}$ 〜 $\boxed{\textbf{41}}$ 〕（配点 50 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

(注意) 各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問１　関数 $y(x)$ は微分方程式

$$y' = a\,y \qquad (\,a \text{ は正の定数})$$

を満たし, $y(0) \neq 0$ とする. いま $y(5) = 2\,y(0)$ ならば, $y(x_1) = 8\,y(0)$ が成り立つ x_1 は $\boxed{\textbf{37}}$ である. また $a =$ $\boxed{\textbf{38}}$ である.

$\boxed{\textbf{37}}$, $\boxed{\textbf{38}}$ の解答群

⓪ 3	① 5	② 8	③ 15	④ 16
⑤ 40	⑥ 125	⑦ $\dfrac{1}{5}\log 2$	⑧ $\dfrac{3}{5}\log 2$	⑨ $\dfrac{8}{5}\log 2$
ⓐ $\dfrac{1}{2}\log 5$	ⓑ $\dfrac{3}{5}\log 5$	ⓒ $\dfrac{8}{5}\log 5$		

解説　微分方程式 $y' = a\,y$ の解は $y(x) = y(0)\,e^{ax}$ である．与えられた条件は,

$$y(5) = y(0)\,e^{5a} = 2\,y(0)$$

と表される．これより,

$$e^{5a} = 2$$

さて，$y(x_1) = y(0)\,e^{ax_1} = 8\,y(0)$ が成り立つのは，　$e^{ax_1} = 8 = 2^3 = \left(e^{5a}\right)^3 = e^{15a}$.
よって，$x_1 = \boxed{15}$　($\boxed{\textbf{37}}$ は ③)

また,

$$a = \boxed{\frac{1}{5}\log 2} \qquad (\boxed{\textbf{38}} \text{ は ⑦ })$$

問 2　微分方程式

$$y' + 2\,x\,y = x$$

の一般解は $y = \boxed{\mathbf{39}}$ である．

$\boxed{\mathbf{39}}$ の解答群

⓪ $e^{x} + c$	① $e^{-x} + c$	② $e^{x^2} + c$	③ $e^{-x^2} + c$
④ $c\,e^{x} + \dfrac{1}{2}$	⑤ $c\,e^{-x} + \dfrac{1}{2}$	⑥ $c\,e^{x^2} + \dfrac{1}{2}$	⑦ $c\,e^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$
⑧ $c\,e^{x^2} + 1$	⑨ $c\,e^{-x^2} + 1$	ⓐ $c\,e^{x} + e^{-x}$	ⓑ $c\,e^{-x} + e^{x}$

(c は任意定数)

解説　方程式 $y' + 2\,x\,y = x$ の両辺に積分因子 e^{x^2} を掛けると

$$\left(e^{x^2}\,y\right)' = x\,e^{x^2}$$

両辺を積分すると

$$e^{x^2}\,y = \int^{x} s\,e^{s^2}\,ds = \frac{1}{2}e^{x^2} + c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

よって一般解は

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + c\right) = \boxed{c\,e^{-x^2} + \frac{1}{2}} \qquad (\ \boxed{\mathbf{39}}\ \text{は}\ ⑦\ )$$

次のように解いてもよい．$y' + 2x\,y = 0$ の一般解は $y = c\,e^{-x^2}$．視察で特殊解 $\dfrac{1}{2}$ を得る．よって非同次方程式の解は $y = c\,e^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$.

問 3　二つの微分方程式

$$\text{(a)}\quad y'' + y' + 4\,y = 0$$

$$\text{(b)}\quad y'' + y' - 6y = 0$$

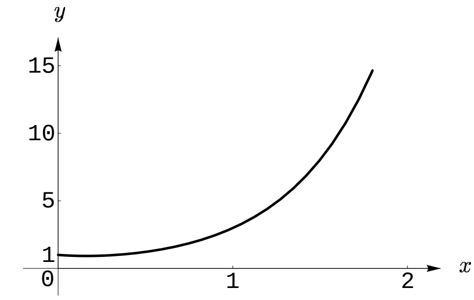
のそれぞれを同一の初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ のもとで解き, $x \geqq 0$ における解のグラフの概形を考える.

- 方程式 (a) の解のグラフの概形は $\boxed{\mathbf{40}}$ である.
- 方程式 (b) の解のグラフの概形は $\boxed{\mathbf{41}}$ である.

（注意）次ページの解答群中のグラフでは x 軸, y 軸の目盛りはグラフごとに異なる.

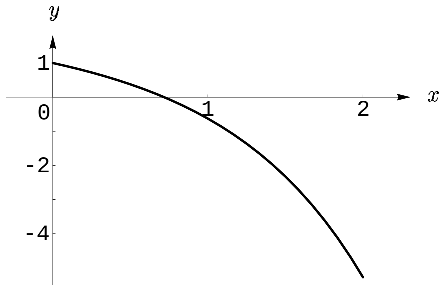
$\boxed{40}$, $\boxed{41}$ の解答群

⓪



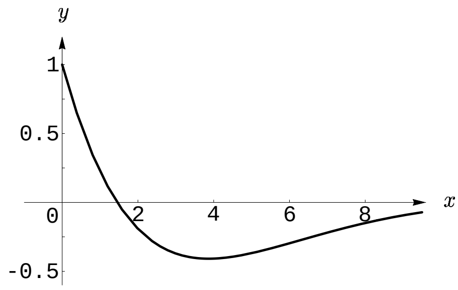
(説明) y は x が十分大きい範囲で単調増加し $x \to \infty$ のとき ∞ に発散する.

①



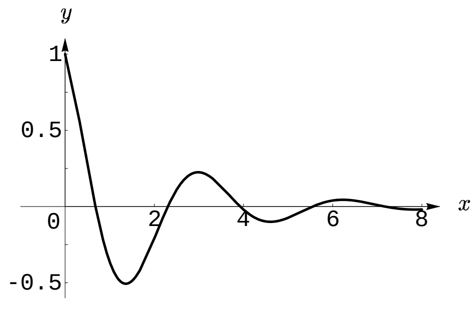
(説明) y は $x \geqq 0$ において単調減少し $x \to \infty$ のとき $-\infty$ に発散する.

②



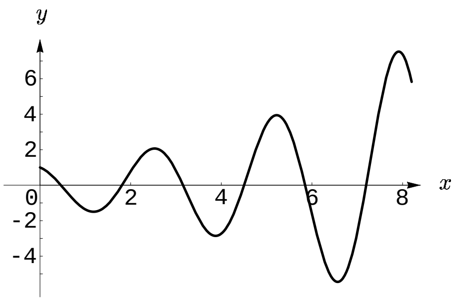
(説明) y は x が十分大きい範囲で単調増加し $x \to \infty$ のとき 0 に収束する.

③



(説明) y は $x \to \infty$ のとき, 正負の値を交互にとりながら 0 に収束する.

④



(説明) y は $x \to \infty$ のとき, 振動しつつ発散する.

解説

(a) 方程式 $y'' + y' + 4\,y = 0$ の特性方程式は，$\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$．特性根は $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{15}}{2}\,i$ である．したがって，一般解は

$$y = e^{(-1/2)x}\bigl\{c_1\ \cos\omega x + c_2\ \sin\omega x\bigr\} \qquad \text{ただし}\ \ \omega = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

である．ここで $c_1,\, c_2$ は任意定数．よって，恒等的に 0 である解を除けば，すべての解が，初期値にかかわらず正負の値を取りながら 0 に収束していくことがわかる．($\boxed{\mathbf{40}}$ は ③)

(b) 方程式 $y'' + y' - 6\,y = 0$ の一般解は

$$y = c_1\, e^{-3x} + c_2\, e^{2x} \qquad (\, c_1,\, c_2\ \text{任意定数}\,)$$

初期条件より解は

$$y = \frac{3}{5}e^{-3x} + \frac{2}{5}e^{2x}$$

この解は x が $x_0 = \dfrac{2}{5}\log\dfrac{3}{2}$ を超えると単調増加し無限大に発散する．($\boxed{\mathbf{41}}$ は ⓪) $x \geqq 0$ で解はつねに正であることからも解のグラフは ⓪ であることが結論される．

第 6 問 (常微分方程式 $2/_2$) 〔解答番号 $\boxed{42}$ 〜 $\boxed{49}$ 〕 (配点 50 点)

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

(注意) 各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

初期条件 $y(0) = 2,\ \ y'(0) = -3$ を満たす微分方程式

$$y'' + 3y' + 2y = f(x) \qquad \text{ただし,} \quad f(x) = \begin{cases} 10\cos x & \left(|x| \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(|x| > \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

の解を $x \geqq 0$ の範囲で求める.

問 1 まず同次方程式 $y'' + 3y' + 2y = 0$ を解く. この方程式の 1 次独立な解は,
$y_1(x) = e^{\boxed{42}x}$, $y_2(x) = e^{\boxed{43}x}$ である. ただし $\boxed{42} < \boxed{43}$ とする.

問 2 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, 与えられた微分方程式は $y'' + 3y' + 2y = 10\cos x$ になる. この方程式は特殊解 (特解) として

$$y = \boxed{44}\cos x + \boxed{45}\sin x$$

を持つ. これよりこの区間における初期値問題の解を $Y_1(x)$ とすると,

$$Y_1(x) = \boxed{46}\,y_1(x) + \boxed{47}\,y_2(x) + \boxed{44}\cos x + \boxed{45}\sin x$$

である.

$\boxed{42}$ 〜 $\boxed{47}$ の解答群

⓪ -7	① -6	② -5	③ -4	④ -3	⑤ -2
⑥ -1	⑦ 0	⑧ 1	⑨ 2	ⓐ 3	ⓑ 4
ⓒ 5	ⓓ 6	ⓔ 7			

問 1 の解説 同次方程式 $y''+3y'+2y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+2)(\lambda+1) = 0$ であるから特性根は $\lambda = -2, -1$. したがって 1 次独立な解は, $y_1(x) = e^{\boxed{-2}x}$, $y_2(x) = e^{\boxed{-1}x} = e^{-x}$ である. ($\boxed{42}$ は⑤) ($\boxed{43}$ は⑥)

問 2 の解説　特殊解を

$$y = A\cos x + B\sin x \quad (A,\ B \text{ は未知定数})$$

と仮定すると,

$$y'' + 3y' + 2y = (A+3B)\cos x + (-3A+B)\sin x$$

である．この式が方程式 $y'' + 3y' + 2y = 10\cos x$ に一致するのは,

$$A + 3B = 10, \qquad -3A + B = 0$$

のときである．これを解いて $A = \boxed{1}$, $B = \boxed{3}$ を得る．　($\boxed{\mathbf{44}}$ は ⑧) ($\boxed{\mathbf{45}}$ は ⓐ)

公式：　非同次方程式の一般解 ＝ 同次方程式の一般解 ＋ 非同次方程式の特殊解 より，一般解は

$$Y_1(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \cos x + 3\sin x \quad (c_1,\ c_2 \text{ 任意定数})$$

となる．初期条件より

$$Y_1(0) = c_1 + c_2 + 1 = 2, \qquad Y_1'(0) = -2c_1 - c_2 + 3 = -3$$

これを解くと，$c_1 = \boxed{5}$, $c_2 = \boxed{-4}$．よって,

$$Y_1(x) = 5e^{-2x} - 4e^{-x} + \cos x + 3\sin x \qquad (\boxed{\mathbf{46}} \text{ は ⓒ}) \ (\boxed{\mathbf{47}} \text{ は ③})$$

問 3　$x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, 与えられた微分方程式は $y'' + 3y' + 2y = 0$ になる．この区間における解を $Y_2(x)$ とすると, 解 $Y_1(x)$ と $Y_2(x)$ は

$$Y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = Y_1\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad Y_2{}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = Y_1{}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす．したがって解 $Y_2(x)$ を

$$Y_2(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

と表すと $C_1 = \boxed{\mathbf{48}}$, $C_2 = \boxed{\mathbf{49}}$ である．

$\boxed{\mathbf{48}}$, $\boxed{\mathbf{49}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② -1	③ 2
④ -2	⑤ $e^{\pi} + 3$	⑥ $-e^{\pi} - 3$	⑦ $-2e^{\pi} + 5$
⑧ $2e^{\pi} - 5$	⑨ $3e^{\pi/2} + 2$	ⓐ $4e^{\pi/2} + 1$	ⓑ $3e^{\pi/2} - 2\ \ 1$
ⓒ $5e^{\pi/2} - 4$			

解説　$Y_2(x) = C_1 e^{-2x} + C_2\, e^{-x}$ とおくと，接続条件

$$Y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = Y_1\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad {Y_2}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = {Y_1}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

は具体的に

$$\begin{cases} C_1\, e^{-\pi} + C_2\, e^{-\pi/2} = 5\, e^{-\pi} - 4\, e^{-\pi/2} + 3 \\ -2C_1\, e^{-\pi} - C_2\, e^{-\pi/2} = -10\, e^{-\pi} + 4\, e^{-\pi/2} - 1 \end{cases}$$

となる．これを $C_1\, e^{-\pi}$, $C_2\, e^{-\pi/2}$ について解くと

$$C_1\, e^{-\pi} = 5\, e^{-\pi} - 2, \qquad C_2\, e^{-\pi/2} = -4\, e^{-\pi/2} + 5$$

よって

$$C_1 = \boxed{5 - 2\, e^{\pi}}, \quad C_2 = \boxed{-4 + 5\, e^{\pi/2}}.$$　（ $\boxed{\textbf{48}}$ は ⑦ ）（ $\boxed{\textbf{49}}$ は ⓒ ）

確率・統計 (第7問, 第8問)

第7問 (確率・統計 $1/_2$) 〔解答番号 $\boxed{50}$ 〜 $\boxed{61}$ 〕（配点 60 点）

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.
(注意) $P(A)$ は事象 A の起こる確率を表す.

問 1 離散型の確率変数 X, Y は独立で, それぞれの確率分布は

X の値	0	1	2	3	4
確率	0.1	0.4	0.1	0.2	0.2

Y の値	0	1	2	3
確率	0.6	0.1	0.2	0.1

で与えられるとする. このとき確率 $P(X+Y=5) = \boxed{50}$ であり, $P(XY=0) = \boxed{51}$ である. また Y の期待値は $E(Y) = \boxed{52}$ であり, 分散は $V(Y) = \boxed{53}$ である.

$\boxed{50}$, $\boxed{51}$ の解答群

⓪ 0　① 0.04　② 0.05　③ 0.06　④ 0.07　⑤ 0.08
⑥ 0.61　⑦ 0.62　⑧ 0.63　⑨ 0.64　ⓐ 0.65　ⓑ 0.66
ⓒ 0.67　ⓓ 0.68　ⓔ 0.69　ⓕ 0.7　ⓖ 0.71

$\boxed{52}$, $\boxed{53}$ の解答群

⓪ 0　① 0.5　② 0.6　③ 0.7　④ 0.8　⑤ 0.9　⑥ 1
⑦ 1.1　⑧ 1.15　⑨ 1.16　ⓐ 1.17　ⓑ 1.18　ⓒ 1.19　ⓓ 1.2
ⓔ 1.21　ⓕ 1.22

解説 $P(X+Y=5)$ を求めるには, X と Y の和が 5 になる組み合わせを考えて,

$$P(X+Y=5) = P(X=2,\, Y=3) + P(X=3,\, Y=2) + P(X=4,\, Y=1)$$

を計算すればよい．独立性を用いると，この式はさらに

$$
\begin{aligned}
&= P(X=2)\,P(Y=3) + P(X=3)\,P(Y=2) + P(X=4)\,P(Y=1) \\
&= 0.1 \times 0.1 + 0.2 \times 0.2 + 0.2 \times 0.1 = \boxed{0.07}
\end{aligned}
$$

となる．　（ **50** は④）

また,

$$
\begin{aligned}
P(XY=0) &= P(X=0) + P(Y=0) - P(X=Y=0) \\
&= P(X=0) + P(Y=0) - P(X=0)P(Y=0) \\
&= 0.1 + 0.6 - 0.1 \times 0.6 = \boxed{0.64}
\end{aligned}
$$

となる．　（ **51** は⑨）

期待値は,

$$E(Y) = 0 \times 0.6 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = \boxed{0.8}$$

である．　（ **52** は④）

同様に,

$$E(Y^2) = 0^2 \times 0.6 + 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.1 = 1.8$$

であるから，分散は

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 1.8 - (0.8)^2 = \boxed{1.16}$$

となる．　（ **53** は⑨）

問 2　確率変数 X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とする．このとき $F(0) = 0,\ F(2) = 1$ ならば $F(-1) = $ **54** であり $P(X > 3) = $ **55** である．

問 3　確率変数 X が正規分布 $N(1, 2)$ に従っているとき，X の確率密度関数を $f(x)$ とすると，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = $ **56** ．また X の分散 $V(X) = $ **57** であるから，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = $ **58** ．

54 〜 **58** **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

問 2 の解説　分布関数は非負の単調非減少関数であることから，ただちに

$$0 \leqq F(-1) \leqq F(0) = 0$$

となり，$F(-1) = \boxed{0}$ である．（ **54** は ⓪ ）

また,

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leqq 3) = 1 - F(3) \leqq 1 - F(2) = 0$$

である．ところが，$0 \leqq P(X > 3)$ であるから $P(X > 3) = \boxed{0}$ でなければならない．（ **55** は ⓪ ）

問 3 の解説　記号 $N(1, 2)$ は，平均 $E(x) = 1$ で，分散 $V(X) = 2$ の正規分布を表す．平均の定義より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = E(X) = \boxed{1}$$

である．（ **56** は ① ），（ **57** は ② ）

また $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx = E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 2 + 1^2 = \boxed{3}$$

を得る．（ **58** は ③ ）

問 4　c は $c > -4$ を満たす定数とし, 確率変数 X は閉区間 $[-4,\, c] = \{x \mid -4 \leqq x \leqq c\}$ 上の一様分布に従っているものとする．このとき $P(X \leqq -2) = \dfrac{1}{3}$ であるとすると, $c =$ **59** である．また期待値は $E(X) =$ **60** であり, $P(-3 \leqq X \leqq -1) =$ **61** である．

59 〜 **61** **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ -1	⑤ -2	⑥ -3
⑦ $\dfrac{1}{2}$	⑧ $\dfrac{1}{3}$	⑨ $\dfrac{1}{4}$	ⓐ $\dfrac{1}{6}$	ⓑ $\dfrac{1}{8}$	ⓒ $\dfrac{1}{12}$	

解説　閉区間 $[-4,\, c]$ 上の一様分布に従うとき，その確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c+4} & (-4 \leqq x \leqq c) \\ 0 & (x < -4 \text{ または } x > c) \end{cases}$$

である．したがって，

$$P(X \leqq -2) = \int_{-\infty}^{-2} f(x)\,dx = \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{c+4} = \frac{2}{c+4}$$

である．題意よりこれが $\dfrac{1}{3}$ になるのであるから，

$$\frac{2}{c+4} = \frac{1}{3} \qquad \therefore\ c = \boxed{2} \qquad \left(\ \boxed{\mathbf{59}}\ \text{は}②\ \right)$$

X の平均は，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$ を計算してもよいが，一様分布では，区間 $[-4,\,c]$ の中央に一致するので，

$$E(X) = \frac{(-4)+c}{2} = \boxed{-1} \qquad \left(\ \boxed{\mathbf{60}}\ \text{は}④\ \right)$$

また，定義に従い $P(-3 \leqq X \leqq -1) = \displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx$ を計算してもよいが， $P(-3 \leqq X \leqq -1)$ は区間 $[-4,\,c]$ に対する $[-3,\,-1]$ の長さの比に一致するので，

$$P(-3 \leqq X \leqq -1) = \frac{(-1)-(-3)}{c-(-4)} = \frac{2}{c+4} = \boxed{\frac{1}{3}} \qquad \left(\ \boxed{\mathbf{61}}\ \text{は}⑧\ \right)$$

第 8 問 (確率・統計 2/2)　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{62}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{67}}$ 〕(配点 40 点)

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

A 大学のキャンパスの池にはウシガエルが多数生息している. U 教授の研究室では毎年この池のウシガエルの調査を行っている. 今までの調査によって, この池に生息するウシガエルの体長の分布は正規分布に従い, 体長の母分散 σ^2 は年によって変化はなく, $\sigma^2 = 35^2\ \mathrm{mm}^2$ と仮定してよいことがわかっている. 今年も 100 匹捕獲して体長を測定したところ, 100 匹の標本平均値は $\overline{x} = 165$ mm であった. そこでこの池に生息するすべてのウシガエルの体長の母平均 μ の信頼度 (信頼係数) 95% の信頼区間を以下のように求めた.

捕獲した 100 匹のウシガエルの体長を表す確率変数をそれぞれ $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とおくと, これらは独立で, すべて平均 μ, 分散 35^2 の正規分布 $N(\mu, 35^2)$ に従っている. ゆえに標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

の分布は平均 $\boxed{\mathbf{62}}$, 分散 $\dfrac{\sigma^2}{100} = \dfrac{35^2}{100}$ の正規分布である. そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \boxed{\mathbf{63}}}{\boxed{\mathbf{64}}}$$

とおけば, Z の分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ である. ここで正規分布表を調べると, およそ

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.95 \qquad \cdots\cdots (*)$$

であることがわかった. 式 $(*)$ を書きかえると,

$$P\left(\overline{X} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{65}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{65}}\right) = 0.95$$

となる. これから実際の標本平均値 $\overline{x}$ に対しても不等式

$$\overline{x} - 1.96 \times \boxed{\mathbf{65}} \leqq \mu \leqq \overline{x} + 1.96 \times \boxed{\mathbf{65}}$$

が成り立っていると推定する. これに数値を代入し計算した結果の小数点以下第 1 位を四捨五入すると, 求める母平均 μ の信頼度 95% の信頼区間は $\boxed{\mathbf{66}}$ (mm) $\leqq \mu \leqq$ $\boxed{\mathbf{67}}$ (mm) である.

$\boxed{62}$, $\boxed{63}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② μ　③ μ^2　④ 100μ　⑤ $\dfrac{\mu}{100}$

$\boxed{64}$, $\boxed{65}$ の解答群

⓪ $\dfrac{35^2}{100}$　① $\dfrac{35^2}{10}$　② $\dfrac{35}{10}$　③ $\dfrac{35}{100}$　④ $\sqrt{\dfrac{35}{10}}$

$\boxed{66}$, $\boxed{67}$ の解答群

⓪ 155　① 156　② 157　③ 158　④ 159　⑤ 160

⑥ 172　⑦ 173　⑧ 174　⑨ 175　ⓐ 176　ⓑ 177

解説　$E(X_k) = \mu, \quad k = 1, 2, \ldots, 100$ から,

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} E(X_k) = \boxed{\mu}$$

を得る．（$\boxed{62}$ は②）

一般にある確率変数 Y が $Y \sim N(m, \sigma^2)$ のとき,

$$\frac{Y-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

である．これを $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{35^2}{100})$ に適用すると

$$Z = \frac{\overline{X} - \boxed{\mu}}{\boxed{\frac{35}{10}}} \sim N(0, 1)$$

を得る．　（$\boxed{63}$ は②）（$\boxed{64}$ は②）

次に不等式 $-1.96 \leqq Z \leqq 1.96$ の Z を $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{35}{10}}$ で置き換えた式は,

$$-1.96 \leqq \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{35}{10}} \leqq 1.96$$

であり，これは

$$\overline{X} - 1.96 \times \frac{35}{10} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \frac{35}{10}$$

と変形される．したがって，$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.95$ は,

$$P\big(\overline{X} - 1.96 \times \boxed{\tfrac{35}{10}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \times \boxed{\tfrac{35}{10}}\big) = 0.95$$

と書き換えられる．（ $\boxed{\mathbf{65}}$ は②）

これから，実際の標本値についても

$$\overline{x} - 1.96 \times \frac{35}{10} \leqq \mu \leqq \overline{x} + 1.96 \times \frac{35}{10}$$

が成り立っていると推定する．これに $\overline{x} = 165$ を代入して

$$165 - 1.96 \times \frac{35}{10} \leqq \mu \leqq 165 + 1.96 \times \frac{35}{10}.$$

これから，$\boxed{158} \leqq \mu \leqq \boxed{172}$ を得る．（ $\boxed{\mathbf{66}}$ は③）（ $\boxed{\mathbf{67}}$ は⑥）