EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2011年12月10日（土）
4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．

(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(8) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(9) 問題冊子は持ち帰ること．

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．

(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は $(\boxed{\mathbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号　$\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{16}}$ 〕

(注意)　$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ はそれぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^3}{x^2} = \boxed{\mathbf{1}}$ である．

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-\sin x} = \boxed{\mathbf{2}}$ である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ 2　⑥ $\dfrac{5}{2}$　⑦ 3　⑧ ∞

⑨ $-\dfrac{1}{3}$　ⓐ $-\dfrac{1}{2}$　ⓑ -1　ⓒ $-\dfrac{3}{2}$　ⓓ -2　ⓔ $-\dfrac{5}{2}$　ⓕ -3　ⓖ $-\infty$

問 2 $f(x) = \log(1+x)$ が $x=0$ の近くで 2 次式 $P(x) = a + bx + cx^2$ により近似されるとは

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0$$

が成り立つことである．係数 a, b, c を求めるのに，$f(x)$ のマクローリン展開 ($x=0$ を中心とするテイラー展開) を用いると $a = \boxed{\mathbf{3}}$, $b = \boxed{\mathbf{4}}$, $c = \boxed{\mathbf{5}}$ となる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ 2　⑥ $\dfrac{5}{2}$　⑦ 3　⑧ ∞

⑨ $-\dfrac{1}{3}$　ⓐ $-\dfrac{1}{2}$　ⓑ -1　ⓒ $-\dfrac{3}{2}$　ⓓ -2　ⓔ $-\dfrac{5}{2}$　ⓕ -3　ⓖ $-\infty$

問 3　不定積分

$$I = \int \frac{2x(x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

を求める．被積分関数は

$$\frac{2x(x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{\boxed{\mathbf{6}}}{(x-1)^2} + \frac{\boxed{\mathbf{7}}}{x-1} + \boxed{\mathbf{8}}\,\frac{x+1}{x^2+1}$$

と部分分数に展開されるので

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \boxed{\mathbf{9}} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \boxed{\mathbf{10}} \\ \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \boxed{\mathbf{11}} \end{cases}$$

(積分定数は省略)

を用いて I を求めることができる．

$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ の解答群

⓪ 0

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ 2　⑥ $\dfrac{5}{2}$　⑦ 3

⑧ $-\dfrac{1}{3}$　⑨ $-\dfrac{1}{2}$　ⓐ -1　ⓑ $-\dfrac{3}{2}$　ⓒ -2　ⓓ $-\dfrac{5}{2}$　ⓔ -3

$\boxed{9}$ 〜 $\boxed{11}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{x-1}$　① $-\dfrac{1}{x-1}$　② $\dfrac{1}{(x-1)^2}$　③ $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

④ $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$　⑤ $-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$　⑥ $\log|x-1|$　⑦ $-\log|x-1|$

⑧ $\sin^{-1}x$　⑨ $-\sin^{-1}x$　ⓐ $\cos^{-1}x$　ⓑ $-\cos^{-1}x$

ⓒ $\tan^{-1}x$　ⓓ $-\tan^{-1}x$

計算用紙

問 4　定数 R は $R>2$ を満たすとし，xy 平面上の集合 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<R^2\}$ で定義された関数 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ を考える．

(1)　$f(x,y)$ の偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{\mathbf{12}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \boxed{\mathbf{13}}$$

であり，

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \boxed{\mathbf{14}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{12}}$ ・ $\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　① $\dfrac{2x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　② $\dfrac{x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

③ $-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　④ $-\dfrac{2x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　⑤ $-\dfrac{x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

⑥ $\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　⑦ $\dfrac{2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　⑧ $\dfrac{y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

⑨ $-\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　ⓐ $-\dfrac{2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　ⓑ $-\dfrac{y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

$\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　① $\dfrac{2R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　② $\dfrac{R}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

③ $\dfrac{R}{R^2-x^2-y^2}$　④ $\dfrac{2R}{R^2-x^2-y^2}$　⑤ $\dfrac{R}{2(R^2-x^2-y^2)}$

(2) 集合 D を $D=\{(x,y)\mid 1\leqq x^2+y^2\leqq 4\}$ とし，重積分

$$I=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

を求める．極座標を利用して計算すると $I=$ **15** である．

15 の解答群

⓪ $2\pi R\sqrt{R^2-3}$　① $2\pi R\left(\sqrt{R^2-1}-\sqrt{R^2-4}\right)$

② $\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{R^2-3}}$　③ $\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{R^2-1}-\sqrt{R^2-4}}$

④ $2\pi R\,(R^2-3)$　⑤ $2\pi R\left(\sqrt{R^2-1}-\sqrt{R^2-2}\right)$

さらに，R が大きくなったときの積分値 I の極限は，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} I=$ **16** である．

16 の解答群

⓪ 0　① π　② 2π　③ 3π　④ 4π　⑤ 5π　⑥ 6π　⑦ ∞

第２分野　線形代数

〔 問１〜 問４： 解答番号 $\boxed{\mathbf{17}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{31}}$ 〕

問１ (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\boxed{\mathbf{17}}$ である.

$\boxed{\mathbf{17}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ① $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{18}}$ である.

$\boxed{\mathbf{18}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 6　⑥ 8　⑦ 10　⑧ 12

⑨ −1　ⓐ −2　ⓑ −3　ⓒ −4　ⓓ −6　ⓔ −8　ⓕ −10　ⓖ −12

計算用紙

問 2　(1) 次のベクトルの組が 1 次従属になるのは, $s = \boxed{\textbf{19}}$ のときである.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

(2) 次のベクトルの組が 1 次独立になるのは, $t \neq \boxed{\textbf{20}}$ のときである.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ t \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{19}}$ ・ $\boxed{\textbf{20}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

⑥ -1　　⑦ -2　　⑧ -3　　⑨ -4　　ⓐ -5

計算用紙

問 3　4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 個のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は定数})$$

と，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を並べてできる行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

について考える．

(1)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が張る $\mathbb{R}^4$ の部分空間を M とする．M の次元は行列 A の階数（ランク）と等しく $\boxed{\mathbf{21}}$ である．

(2)　$\boldsymbol{b}$ が部分空間 M に属するのは $k = \boxed{\mathbf{22}}$ のときである．

(3)　$k = \boxed{\mathbf{22}}$ のとき，連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は解をもち，その解 $\boldsymbol{x}$ はすべて

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{23}} \\ \boxed{\mathbf{24}} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{25}} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

と表すことができる．

$\boxed{21}$ ～ $\boxed{25}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ −1　⑧ −2　⑨ −3　ⓐ −4　ⓑ −5　ⓒ −6

計算用紙

問 4　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \\ c & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値が 1, 2, 3 であるとする.

(1)　このとき $a = \boxed{\mathbf{26}}$, $b = \boxed{\mathbf{27}}$, $c = \boxed{\mathbf{28}}$ である.

(2)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{29}} \\ \boxed{\mathbf{30}} \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対応する固有ベクトルである. この $\boldsymbol{x}$ に対して

$$(A^2 - 3A)\,\boldsymbol{x} = \boxed{\mathbf{31}}\,\boldsymbol{x}$$

になる.

$\boxed{\mathbf{26}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{31}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8

⑨ −1　ⓐ −2　ⓑ −3　ⓒ −4　ⓓ −5　ⓔ −6　ⓕ −7　ⓖ −8

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 ～ 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{32}}$ ～ $\boxed{\mathbf{46}}$ 〕

(注意) 問 1～問 4 における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問 1 (1) 微分方程式

$$y' + y\cos x = 0$$

の一般解は $\boxed{\mathbf{32}}$ である.

(2) 微分方程式

$$(*) \qquad y' = 1 + \frac{y}{x}$$

を考える. このとき

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

とおくと $u(x)$ に関する微分方程式

$$u' = \boxed{\mathbf{33}}$$

が得られる. この微分方程式の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{\mathbf{34}}$$

である. したがって, $(*)$ の一般解は $y(x) = x\,\boxed{\mathbf{34}}$ となる.

$\boxed{\mathbf{32}}$ **の解答群**

⓪ $e^{\sin x} + C$　① $e^{\cos x} + C$　② $e^{-\sin x} + C$

③ $e^{-\cos x} + C$　④ $Ce^{\sin x}$　⑤ $Ce^{\cos x}$

⑥ $Ce^{-\sin x}$　⑦ $Ce^{-\cos x}$　(C は任意定数)

$\boxed{33}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{x}$　① $\dfrac{1}{x}+\dfrac{u}{x}$　② $u+\dfrac{u}{x}$　③ $\dfrac{u}{x}$

④ x　⑤ xu　⑥ u　⑦ $1+u$

$\boxed{34}$ の解答群

⓪ $\log|x|+C$　① $Cx-1$　② Cxe^x　③ Cx

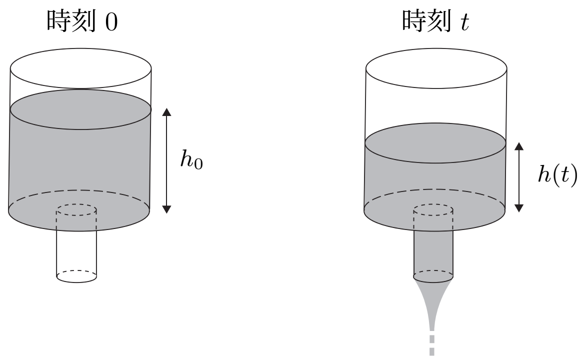
④ $\dfrac{x^2}{2}+C$　⑤ $Ce^{x^2/2}$　⑥ Ce^x　⑦ Ce^x-1

(C は任意定数)

問 2　下の左図のように，円筒容器に液体が底面から高さ h_0 $(h_0 > 0)$ まで満たされている．時刻 $t = 0$ で底面の排出口を開き液体を外へ流し出す．容器内の液面の高さ $h(t)$ は微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dh}{dt} = -K\sqrt{h}$$

に従い減少していくものとする．ここで，K は正の定数である．以下では，$0 < h(t) \leqq h_0$ が成り立つ時間範囲内で $h(t)$ を考える．



(1)　初期条件 $h(0) = h_0$ のもとでの微分方程式 $(*)$ の解 $h(t)$ が，$0 < h(t) \leqq h_0$ を満たす時間範囲は $0 \leqq t <$ **35** である．

35 **の解答群**

⓪ $\dfrac{{h_0}^2}{K}$　① $\dfrac{2{h_0}^2}{K}$　② $\dfrac{h_0}{K}$　③ $\dfrac{2h_0}{K}$　④ $\dfrac{\sqrt{h_0}}{K}$

⑤ $\dfrac{2\sqrt{h_0}}{K}$　⑥ $\dfrac{h_0}{K^2}$　⑦ $\dfrac{2h_0}{K^2}$

(2)　$h_0 = 100$,　$K = 0.02$ のとき, $h(T) = 16$ となる時刻 T は **36** である．求めた T は，$0 < T <$ **35** であることが確かめられる．

36 **の解答群**

⓪ 200　① 400　② 600　③ 1000　④ 1400　⑤ 3000

⑥ 4000　⑦ 10000　⑧ 20000　⑨ 80000　ⓐ 100000

計算用紙

問 3　正の定数 k を含んだ次の微分方程式

$$(*) \qquad y'' + 2ky' + y = 0$$

を考える．

(1)　方程式 $(*)$ の一般解は

$$k = \frac{4}{5} \text{ のとき } \boxed{\mathbf{37}},$$

$$k = 1 \text{ のとき } \boxed{\mathbf{38}},$$

$$k = \frac{5}{4} \text{ のとき } \boxed{\mathbf{39}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{37}}$ ～ $\boxed{\mathbf{39}}$ の解答群

⓪ $e^{3x/5}\left(C_1 \cos\dfrac{4x}{5} + C_2 \sin\dfrac{4x}{5}\right)$　① $e^{4x/5}\left(C_1 \cos\dfrac{3x}{5} + C_2 \sin\dfrac{3x}{5}\right)$

② $e^{-3x/5}\left(C_1 \cos\dfrac{4x}{5} + C_2 \sin\dfrac{4x}{5}\right)$　③ $e^{-4x/5}\left(C_1 \cos\dfrac{3x}{5} + C_2 \sin\dfrac{3x}{5}\right)$

④ $e^{x}\left(C_1 + C_2 x\right)$　⑤ $e^{-x}\left(C_1 + C_2 x\right)$

⑥ $e^{5x/4}\left(C_1 \cos\dfrac{3x}{4} + C_2 \sin\dfrac{3x}{4}\right)$　⑦ $e^{-5x/4}\left(C_1 \cos\dfrac{3x}{4} + C_2 \sin\dfrac{3x}{4}\right)$

⑧ $C_1 e^{x/2} + C_2 e^{2x}$　⑨ $C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-2x}$

ⓐ $C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-2x}$　ⓑ $C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{2x}$

（C_1, C_2 は任意定数）

(2) 初期条件 $y(0) = a,\ y'(0) = b$ を満たす $(*)$ の解を $y_0(x)$ とおく．このとき $\lim_{x\to\infty} y_0(x) = 0$ が成り立つかどうかを考える．これに関して正しい命題は $\boxed{\mathbf{40}}$ である．

$\boxed{\mathbf{40}}$ **の解答群**

⓪ 初期値 a, b の値によって，$\lim_{x\to\infty} y_0(x) = 0$ が成り立ったり，成り立たなかったりする．

① 初期値 a, b の値によらず $\lim_{x\to\infty} y_0(x) = 0$ が常に成り立つ．

問 4 微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 2y' - 3y = 5\sin x$$

の解で初期条件

$$(**) \qquad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}$$

を満たす $y(x)$ を求める.

(1) $(*)$ の特殊解 (特解) を

$$y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

とおくと，$C_1 = \boxed{\textbf{41}}$, $C_2 = \boxed{\textbf{42}}$ である.

$\boxed{\textbf{41}}$ ・ $\boxed{\textbf{42}}$ の解答群

⓪ 0

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

⑥ $-\frac{1}{4}$　⑦ $-\frac{1}{2}$　⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3

(2) $(*)$ に対応する同次方程式 (補助方程式)

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

の一般解は

$$A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x} \qquad (A_1,\ A_2 \text{ は任意定数})$$

であるから $(*)$ の一般解は $\boxed{\textbf{43}}$ である.

$\boxed{\textbf{43}}$ の解答群

⓪ $A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x} + y_0(x)$　① $A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x} - y_0(x)$

② $\left(A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x}\right) y_0(x)$

(3)　(2) で求めた $\boxed{43}$ が初期条件 $(**)$ を満たすのは

$$A_1 = \boxed{\mathbf{44}}, \quad A_2 = \boxed{\mathbf{45}}$$

のときである．これによって求める解 $y(x)$ が得られる．さらに

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \boxed{\mathbf{46}}$$

が成り立つ．

$\boxed{44}$ 〜 $\boxed{46}$ の解答群

⓪ 0

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3　⑥ ∞

⑦ $-\dfrac{1}{4}$　⑧ $-\dfrac{1}{2}$　⑨ -1　ⓐ -2　ⓑ -3　ⓒ $-\infty$

計算用紙

計算用紙

第4分野　確率・統計

〔問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{47}}$ ～ $\boxed{\textbf{65}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$, $D(X)$ はそれぞれ X の期待値 (平均，平均値)，分散，標準偏差を表す．

問 1　(1)　確率変数 X の確率分布が次で与えられている．

X の値	1	3	5	7	9
確率	a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

(a, b は定数)

期待値が $E(X) = 5$ のとき，$a = \boxed{\textbf{47}}$, $b = \boxed{\textbf{48}}$ である．

$\boxed{\textbf{47}}$ ・ $\boxed{\textbf{48}}$ **の解答群**

⓪ 0　① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{8}$　④ $\frac{1}{16}$

(2)　確率変数 X の期待値が $E(X) = 1$，標準偏差が $D(X) = \sqrt{2}$ であるとき，$E(X^2) = \boxed{\textbf{49}}$ である．

$\boxed{\textbf{49}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

計算用紙

問 2　2 つの事象 A, B の確率が

$$P(A) = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{1}{4}$$

であるとする．

(1)　$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ のとき，A と B は $\boxed{\textbf{50}}$．また，$P(A \cup B) = \boxed{\textbf{51}}$ となる．

(2)　事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．

いま $P(A|B) = \frac{1}{3}$ のとき，A と B は $\boxed{\textbf{52}}$．このとき

$$P(B|A) = \boxed{\textbf{53}}$$

となる．

$\boxed{\textbf{50}}$ ・ $\boxed{\textbf{52}}$ の解答群

⓪ 独立である　　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

$\boxed{\textbf{51}}$ ・ $\boxed{\textbf{53}}$ の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{12}$	② $\frac{1}{6}$	③ $\frac{1}{4}$	④ $\frac{1}{3}$	⑤ $\frac{5}{12}$
⑥ $\frac{7}{12}$	⑦ $\frac{2}{3}$	⑧ $\frac{3}{4}$	⑨ $\frac{5}{6}$	ⓐ $\frac{11}{12}$	ⓑ 1

計算用紙

問 3 20 分ごとに電車が発車する駅に, あらかじめ時刻表など調べずにA君がやってきた. A君が駅に着いてから，はじめて電車が発車するまでの時間を X 分とおく．ただし電車の発車時刻ちょうどにA君が駅に着いた場合は $X=0$ とする．すなわち X のとる値の範囲は $0 \leqq X < 20$ である．また，任意の区間 $[a, b] \quad (0 \leqq a < b < 20)$ について

$$P(a \leqq X \leqq b) = \frac{b-a}{20}$$

とする．したがって，X の確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \begin{cases} \boxed{\mathbf{54}} & (0 \leqq x < 20) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であり, 平均 $E(X) = \boxed{\mathbf{55}}$, 分散 $V(X) = \boxed{\mathbf{56}}$ である.

$\boxed{54}$ 〜 $\boxed{56}$ の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{50}$	② $\frac{1}{40}$	③ $\frac{1}{20}$	④ $\frac{1}{10}$	⑤ $\frac{1}{5}$
⑥ $\frac{1}{4}$	⑦ $\frac{1}{3}$	⑧ 1	⑨ 5	ⓐ 10	ⓑ 15
ⓒ 20	ⓓ 25	ⓔ 30	ⓕ $\frac{25}{3}$	ⓖ $\frac{50}{3}$	ⓗ $\frac{100}{3}$

問 4　確率変数 X の分布関数を $F(x)=P(X \leqq x)$ とし，確率密度関数を $f(x)$ とする．また，$\lambda>0$ を定数とし，

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

が成り立っているとする．このとき，$x>0$ に対して $f(x)=$ $\boxed{\mathbf{57}}$ である．また，$Y=2X+1$ の確率密度関数 $g(y)$ は，$y>1$ に対して $g(y)=$ $\boxed{\mathbf{58}}$ である．

$\boxed{\mathbf{57}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② $e^{-\lambda x}$　③ $\lambda e^{-\lambda x}$　④ $\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$

$\boxed{\mathbf{58}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1

② $2\lambda e^{-\lambda(2y+1)}$　③ $2\lambda e^{-\lambda(2y-1)}$　④ $2\lambda e^{-\frac{\lambda(y-1)}{2}}$　⑤ $\lambda e^{-\frac{\lambda(y-1)}{2}}$

⑥ $\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda(2y+1)}$　⑦ $\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda(2y-1)}$　⑧ $\dfrac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda(y-1)}{2}}$　⑨ $\lambda e^{-\frac{\lambda(y+1)}{2}}$

問 5　表が出る確率が p である硬貨を 100 回投げたところ，60 回表が出た．この硬貨は表が出やすいかどうかを有意水準 5% で片側検定を行う．

まず帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$H_0:\ p=0.5, \qquad H_1:\ p>0.5$$

とおく．表の出る回数を X とおけば，確率変数 X は二項分布 $B(n,p)$ $(n=100)$ に従うので平均 $E(X)=\boxed{\mathbf{59}}$，分散 $V(X)=\boxed{\mathbf{60}}$ である．n が十分大きいので X は 平均 $\boxed{\mathbf{59}}$，分散 $\boxed{\mathbf{60}}$ の正規分布で近似できる．したがって，

$$Z=\frac{X-\boxed{\mathbf{59}}}{\sqrt{\boxed{\mathbf{60}}}}$$

の分布は平均 0, 分散 1 の標準正規分布とみなしてよい．

帰無仮説 $H_0: p=0.5$ のもとで

$$Z=\frac{X-\boxed{\mathbf{61}}}{\boxed{\mathbf{62}}}$$

である．この場合，X の実現値は 60 であるから Z の実現値は $\boxed{\mathbf{63}}$ となる．正規分布表を調べると

$$P(Z\leqq 1.6449)=0.95$$

であるから, 仮説 H_0 は $\boxed{\mathbf{64}}$．したがって，有意水準 5% で表が出やすいと $\boxed{\mathbf{65}}$．

$\boxed{59}$ ・ $\boxed{60}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② p　③ $\sqrt{n}p$
④ np　⑤ np^2　⑥ $\sqrt{n}p(1-p)$　⑦ $np(1-p)$
⑧ $\sqrt{np(1-p)}$

$\boxed{61}$ ・ $\boxed{62}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{5}{2}$　④ 5　⑤ 25
⑥ 50　⑦ 100

$\boxed{63}$ **の解答群**

⓪ 0　① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\dfrac{5}{2}$

⑥ 3　⑦ $\dfrac{7}{2}$

$\boxed{64}$ **の解答群**

⓪ 棄却される　① 棄却されない

$\boxed{65}$ **の解答群**

⓪ いえる　① いえない