EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2010 年 12 月 11 日（土）

4 分野受験 午後 1 時 30 分 〜 午後 4 時 10 分

3 分野受験 午後 1 時 30 分 〜 午後 3 時 30 分

2 分野受験 午後 1 時 30 分 〜 午後 2 時 50 分

1 分野受験 午後 1 時 30 分 〜 午後 2 時 10 分

＊ 受験分野は，各大学の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと．

(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(6) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること．

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(8) 試験開始 40 分後から退席を認める．

(9) 問題冊子は持ち帰ること．

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること．

(11) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も相応しいものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群に相応しいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は $(\boxed{\mathbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{19}}$ 〕

(注意)　$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ はそれぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲 (値域) は，
$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right) = \boxed{\mathbf{1}}$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \boxed{\mathbf{2}}$ である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ $-\infty$　① -4　② -2　③ -1　④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ 0
⑥ $\dfrac{1}{2}$　⑦ 1　⑧ 2　⑨ 4　ⓐ ∞

計算用紙

問 2　関数 $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x \ (-1 < x < 1)$ を考える.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \boxed{\mathbf{3}}, \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \boxed{\mathbf{4}}$$

より

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x\right) = \boxed{\mathbf{5}}$$

である.

$\boxed{3}$ ・ $\boxed{4}$ の解答群

⓪ $\sin^{-1} x$	① $-\sin^{-1} x$	② $\cos^{-1} x$	③ $-\cos^{-1} x$
④ $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$	⑤ $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$	⑥ $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$	⑦ $-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	ⓐ $\dfrac{1}{x^2+1}$	ⓑ $-\dfrac{1}{x^2+1}$

$\boxed{5}$ の解答群

⓪ 0	① $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x$	② $-\cos^{-1} x + \sin^{-1} x$
③ $\dfrac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$	④ $-\dfrac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$	⑤ $\dfrac{2}{x^2+1}$
⑥ $-\dfrac{2}{x^2+1}$	⑦ $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$	⑧ $-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

さらに，$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \boxed{\textbf{6}}$，$\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \boxed{\textbf{7}}$ である．したがって，

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \boxed{\textbf{8}}$$

となる．

$\boxed{\textbf{6}}$ ・ $\boxed{\textbf{7}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\pi}{6}$	① $\dfrac{\pi}{4}$	② $\dfrac{\pi}{3}$	③ $\dfrac{1}{6}$	④ $\dfrac{1}{3}$	⑤ $\dfrac{1}{2}$
⑥ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑧ $-\dfrac{\pi}{6}$	⑨ $-\dfrac{\pi}{4}$	ⓐ $-\dfrac{\pi}{3}$	ⓑ $-\dfrac{1}{6}$
ⓒ $-\dfrac{1}{3}$	ⓓ $-\dfrac{1}{2}$	ⓔ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	ⓕ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		

$\boxed{\textbf{8}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\sqrt{2}$	③ π
④ $\dfrac{\pi}{2}$	⑤ $\dfrac{\pi}{3}$	⑥ $\dfrac{\pi}{4}$	⑦ $\dfrac{\pi}{6}$
⑧ $\dfrac{2}{x^2+1}$	⑨ $-\dfrac{2}{x^2+1}$	ⓐ $\tan^{-1} x$	ⓑ $-\tan^{-1} x$

問 3 $\int \log(1+x^2)\,dx$ を計算する．部分積分を利用すると

$$\begin{aligned}\int \log(1+x^2)\,dx &= x\log(1+x^2) - \int \boxed{\textbf{9}}\,dx \\ &= x\log(1+x^2) + \boxed{\textbf{10}} + C\end{aligned}$$

である．ただし，C は任意定数である．

$\boxed{9}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{2}$	① 1	② 2
③ $2x^2$	④ $\frac{x}{1+x^2}$	⑤ $\frac{2x}{1+x^2}$
⑥ $\frac{x^2}{1+x^2}$	⑦ $\frac{2x^2}{1+x^2}$	⑧ $\log(1+x^2)$
⑨ $x\log(1+x^2)$	ⓐ $x^2\log(1+x^2)$	ⓑ $\frac{1}{2}x^2\log(1+x^2)$

$\boxed{10}$ の解答群

⓪ $-\frac{1}{2}x$	① $-x$	② $-2x$
③ $-\frac{2}{3}x^2$	④ $\log(1+x^2)$	⑤ $-\log(1+x^2)$
⑥ $\frac{\log(1+x^2)}{2}$	⑦ $-\frac{\log(1+x^2)}{2}$	⑧ $\tan^{-1}x$
⑨ $2\tan^{-1}x$	ⓐ $-2x+2\log(x^2+1)$	ⓑ $2x+2\log(x^2+1)$
ⓒ $\tan^{-1}x+x$	ⓓ $\tan^{-1}x-x$	ⓔ $x-\tan^{-1}x$
ⓕ $2\tan^{-1}x+2x$	ⓖ $2\tan^{-1}x-2x$	ⓗ $2x-2\tan^{-1}x$

計算用紙

問 4 関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)\ \ ((x,y)\neq(0,0))$ を考える．

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\boxed{\mathbf{11}},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\boxed{\mathbf{12}}$$

である．また，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\boxed{\mathbf{13}},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\boxed{\mathbf{14}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{x^2+y^2}$
③ $\dfrac{2}{x^2+y^2}$	④ $\dfrac{2x}{x^2+y^2}$	⑤ $\dfrac{2y}{x^2+y^2}$
⑥ $\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$	⑦ $\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$	⑧ $\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$
⑨ $-\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$	ⓐ $\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$	ⓑ $-\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$
ⓒ $\dfrac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$	ⓓ $\dfrac{2(y^2-x^2)}{x^2+y^2}$	ⓔ $\dfrac{2(x-y)^2}{x^2+y^2}$
ⓕ $\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$	ⓖ $\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$	ⓗ $\dfrac{2(x-y)^2}{(x^2+y^2)^2}$

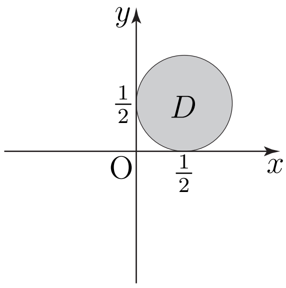
計算用紙

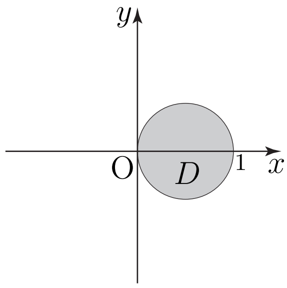
問 5　重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy$ を計算する．ここで D は xy 平面上の集合

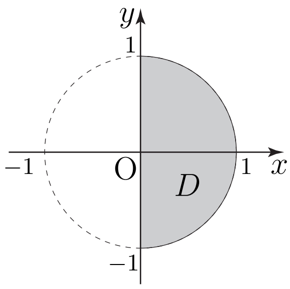
$$D = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq x\,\}$$

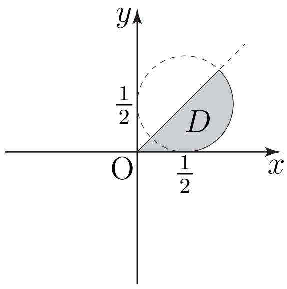
である．集合 D を図示すると $\boxed{\mathbf{15}}$ となる．

$\boxed{\mathbf{15}}$ **の解答群**

⓪ 

① 

② 

③ 

集合 D は

$$D = \{\,(x, y) \mid\ 0 \leqq x \leqq 1,\ \boxed{\mathbf{16}} \leqq y \leqq \boxed{\mathbf{17}}\,\}$$

と表すことができる．

$\boxed{\mathbf{16}}$ ・ $\boxed{\mathbf{17}}$ **の解答群**

⓪ $-\sqrt{x - x^2} + \dfrac{1}{2}$	① $\sqrt{x - x^2} + \dfrac{1}{2}$	② $-\sqrt{x - x^2}$
③ $\sqrt{x - x^2}$	④ $-\sqrt{1 - x^2}$	⑤ $\sqrt{1 - x^2}$
⑥ $-\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{2}$	⑦ x	⑧ 0
⑨ $\dfrac{1}{2}$	ⓐ 1	ⓑ 2

したがって

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\boxed{\mathbf{16}}}^{\boxed{\mathbf{17}}} \sqrt{x}\,dy \right) dx = \int_0^1 \boxed{\mathbf{18}}\, dx$$

となる．

$\boxed{\mathbf{18}}$ **の解答群**

⓪ $x\sqrt{1-x}$	① $2x\sqrt{1-x}$	② $\dfrac{x\sqrt{x}}{3}$
③ $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$	④ $\dfrac{4}{3}x^2\sqrt{1-x}$	⑤ $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-x^2}}$

これより，$\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \boxed{\mathbf{19}}$ である．

$\boxed{\mathbf{19}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{2}{15}$	① $\dfrac{4}{15}$	② $\dfrac{8}{15}$	③ $\dfrac{16}{15}$	④ $\dfrac{64}{315}$

第２分野　線形代数

〔問１〜問４：解答番号 $\boxed{20}$ 〜 $\boxed{38}$ 〕

(注意) 行列 A の転置行列は ${}^tA$ で表す.

問１ (1) ３次正方行列 A の行列式の値が -2 であるとき，$2A$ の行列式の値は $\boxed{20}$ であり，逆行列 A^{-1} の行列式の値は $\boxed{21}$ である．また，転置行列 ${}^tA$ の行列式の値は $\boxed{22}$ である.

$\boxed{20}$ 〜 $\boxed{22}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4	④ 6	⑤ 16
⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{4}$	⑧ $\dfrac{2}{3}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -4
ⓒ -6	ⓓ -16	ⓔ $-\dfrac{1}{2}$	ⓕ $-\dfrac{1}{4}$	ⓖ $-\dfrac{2}{3}$	

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{23}$ である.

$\boxed{23}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

計算用紙

問 2　3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + az = -1 \\ -2x - 3y - 8z = a+3 \\ 4x + 7y + a^2z = -9 \end{cases} \qquad (a \text{ は定数})$$

が解をもつための必要十分条件は $a \neq \boxed{\mathbf{24}}$ である．特に，$a = \boxed{\mathbf{25}}$ のときには，解は一意に決まらず，無数に存在する．

$\boxed{\mathbf{24}}$・$\boxed{\mathbf{25}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

計算用紙

問 3 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 個のベクトル

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} k+6 \\ k+6 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ k^2 \\ 2k+9 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{v}$ にも $\boldsymbol{w}$ にも平行となるのは $k = \boxed{\mathbf{26}}$ のときである.

(2) $k \neq \boxed{\mathbf{26}}$ の場合で, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 次従属 (線形従属) となるのは $k = \boxed{\mathbf{27}}$ のときである.

(3) (1) と (2) の結果から, 行列 $\begin{pmatrix} k & k+6 & 9 \\ k & k+6 & k^2 \\ -1 & 1 & 2k+9 \end{pmatrix}$ の階数 (ランク) は

$k = \boxed{\mathbf{26}}$ のとき $\boxed{\mathbf{28}}$,

$k = \boxed{\mathbf{27}}$ のとき $\boxed{\mathbf{29}}$,

$k \neq \boxed{\mathbf{26}}$ かつ $k \neq \boxed{\mathbf{27}}$ のとき $\boxed{\mathbf{30}}$

となる.

$\boxed{\mathbf{26}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{30}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

計算用紙

問 4　任意の正方行列 A は，対称行列 B と反対称行列 (交代行列) C を用いて

$$(*) \qquad A = B + C \quad ({}^tB = B,\ {}^tC = -C)$$

と表される．

(1)　B および C を A と ${}^tA$ を用いて表すと，それぞれ

$$B = \boxed{\textbf{31}}\,, \quad C = \boxed{\textbf{32}}$$

となる．

$\boxed{\textbf{31}}$ ・ $\boxed{\textbf{32}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{A + {}^tA}{2}$　① $\dfrac{A - {}^tA}{2}$　② $\dfrac{{}^tA - A}{2}$　③ $-\dfrac{A + {}^tA}{2}$

(2)　$(*)$ において $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$b_1 = \boxed{\textbf{33}}\,, b_2 = \boxed{\textbf{34}}\,, c_3 = \boxed{\textbf{35}}\,, c_4 = \boxed{\textbf{36}}$$

であり，B の固有値は $\boxed{\textbf{37}}$，C の固有値は $\boxed{\textbf{38}}$ である．

$\boxed{\textbf{33}}$ 〜 $\boxed{\textbf{36}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

$\boxed{37}$ ・ $\boxed{38}$ **の解答群**

⓪ 1 と 5	① 1 と 6	② 1 と 7	③ 2 と 5	④ 2 と 6
⑤ 2 と 7	⑥ 3 と 5	⑦ 3 と 6	⑧ 3 と 7	⑨ ± 1
ⓐ ± 2	ⓑ ± 3	ⓒ ± 4	ⓓ $\pm i$	ⓔ $\pm 2i$
ⓕ $\pm 3i$	ⓖ $\pm 4i$		(i は虚数単位)	

第３分野　常微分方程式

〔問１〜問４：解答番号 $\boxed{\mathbf{39}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{53}}$〕

(注意) 問1〜問3における y は x の関数であり，関数 y に対して y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問１　微分方程式

$$(*) \qquad y' + 2y = 2x + 5$$

について考える.

(1)　対応する同次方程式

$$y' + 2y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{39}}$$

である.

$\boxed{\mathbf{39}}$ の解答群

⓪ Ce^{2x}	① Ce^{-2x}	② Cxe^{2x}	③ Cxe^{-2x}
④ $Ce^{\frac{x}{2}}$	⑤ $Ce^{-\frac{x}{2}}$	⑥ $Cxe^{\frac{x}{2}}$	⑦ $Cxe^{-\frac{x}{2}}$
⑧ $Cx+2$	⑨ $x+C$	(C は任意定数)	

(2)　微分方程式 $(*)$ の特殊解 (特解) を

$$y_p(x) = ax + b$$

とおくと，

$$a = \boxed{\mathbf{40}}, \quad b = \boxed{\mathbf{41}}$$

である.

$\boxed{40}$ ・ $\boxed{41}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4
ⓐ -5	ⓑ $\dfrac{1}{2}$	ⓒ $-\dfrac{1}{2}$	ⓓ $\dfrac{5}{2}$	ⓔ $-\dfrac{5}{2}$

(3) (1) と (2) より，微分方程式 $(*)$ の一般解は

$$y(x) = \boxed{\textbf{42}}$$

である．

$\boxed{42}$ の解答群

⓪ $2x + \dfrac{5}{2}$	① $2e^{2x} + x + 4$
② $-e^{-2x} + x + 2$	③ $2(e^{\frac{x}{2}} + x) + 3$
④ $x(e^{2x} + 2) + 5$	⑤ $x(e^{-2x} + \dfrac{5}{2}) - \dfrac{1}{2}$
⑥ $\dfrac{1}{2}(e^{-\frac{x}{2}} + x + 5)$	⑦ $Ce^{2x} + 2x + 1$
⑧ $Ce^{-2x} + x + 2$	⑨ $Ce^{\frac{x}{2}} + 2x + 5$
ⓐ $Ce^{-2x} + 2x + \dfrac{5}{2}$	ⓑ $x(Ce^{2x} + 2) + 3$
ⓒ $x(Ce^{-2x} + 1) + 4$	ⓓ $x(Ce^{\frac{x}{2}} + 2) + 1$
ⓔ $Ce^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{5x-1}{2}$	ⓕ $x(Ce^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{2}) + \dfrac{5}{2}$

(C は任意定数)

問 2 関数 $y(x)$ についての微分方程式

$$(*)\qquad y' = \frac{(x-y)y}{x^2}$$

を $x > 0$ の範囲で考える．このとき，

$$z = \frac{y}{x}$$

とおくと，

$$y' = z + xz'$$

であるから，$(*)$ より関数 $z(x)$ についての微分方程式

$$z' = \boxed{\mathbf{43}}$$

が得られる．これを解けば

$$z(x) = \boxed{\mathbf{44}}$$

である．

$\boxed{43}$ の解答群

⓪ z	① $-z$	② z^2	③ $-z^2$
④ $z - z^2$	⑤ xz	⑥ $-xz$	⑦ xz^2
⑧ $-xz^2$	⑨ $x(z - z^2)$	ⓐ $\dfrac{z}{x}$	ⓑ $-\dfrac{z}{x}$
ⓒ $\dfrac{z^2}{x}$	ⓓ $-\dfrac{z^2}{x}$	ⓔ $\dfrac{z - z^2}{x}$	

$\boxed{44}$ の解答群

⓪ Ce^{x}	① Ce^{-x}	② $Ce^{\frac{x^2}{2}}$
③ $Ce^{-\frac{x^2}{2}}$	④ $\dfrac{1}{x + C}$	⑤ $\dfrac{1}{C - x}$
⑥ $\dfrac{2}{x^2 + C}$	⑦ $\dfrac{2}{C - x^2}$	⑧ $\dfrac{1}{\log x + C}$
⑨ $\dfrac{1}{C - \log x}$	ⓐ $\dfrac{Ce^{x}}{1 + Ce^{x}}$	ⓑ $\dfrac{C(x+1)}{1 + C(x+1)}$

(C は任意定数)

したがって，微分方程式 $(*)$ の一般解は

$$y(x) = x\,\boxed{\mathbf{44}}$$

である．また，$y(1) = 1$ を満たす方程式 $(*)$ の解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{45}}$$

であり，$x \to \infty$ のとき $y(x)$ は $\boxed{\mathbf{46}}$．

$\boxed{45}$ の解答群

⓪ 1	① x	② e^{x-1}
③ e^{1-x}	④ xe^{x-1}	⑤ xe^{1-x}
⑥ $\dfrac{2}{x^2+1}$	⑦ $\dfrac{2}{3-x^2}$	⑧ $\dfrac{2x}{x^2+1}$
⑨ $\dfrac{2x}{3-x^2}$	ⓐ $\dfrac{1}{\log x+1}$	ⓑ $\dfrac{x}{\log x+1}$
ⓒ $\dfrac{1}{1-\log x}$	ⓓ $\dfrac{x}{1-\log x}$	

$\boxed{46}$ の解答群

⓪ 0 に収束する	① 1 に収束する
② ∞ に発散する	③ $-\infty$ に発散する
④ 振動する	

問 3　微分方程式

$$y'' + 4y' + ky = 0 \quad (k \text{ は定数})$$

について考える．

(1)　一般解は

$k = 0$ のとき　$y(x) = \boxed{\textbf{47}}$,

$k = 4$ のとき　$y(x) = \boxed{\textbf{48}}$,

$k = 8$ のとき　$y(x) = \boxed{\textbf{49}}$

である．

$\boxed{47}$ 〜 $\boxed{49}$ の解答群

⓪ $C_1e^{2x} + C_2$　　① $C_1e^{-2x} + C_2$

② $C_1e^{4x} + C_2$　　③ $C_1e^{-4x} + C_2$

④ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$　　⑤ $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

⑥ $C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}$　　⑦ $C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$

⑧ $e^{2x}(C_1 + C_2x)$　　⑨ $e^{-2x}(C_1 + C_2x)$

ⓐ $e^{4x}(C_1 + C_2x)$　　ⓑ $e^{-4x}(C_1 + C_2x)$

ⓒ $e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$　　ⓓ $e^{-2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2)　正の値のみをとる特殊解 (特解) が存在するための必要十分条件は $\boxed{\textbf{50}}$ である．

$\boxed{50}$ の解答群

⓪ $k = 0$　① $k \leqq 0$　② $k < 0$　③ $k \geqq 0$

④ $k > 0$　⑤ $k = 4$　⑥ $k \leqq 4$　⑦ $k < 4$

⑧ $k \geqq 4$　⑨ $k > 4$　ⓐ $0 \leqq k \leqq 4$　ⓑ $0 < k < 4$

次に，微分方程式

$$y'' + 4y' = 6e^{-x}$$

を考えると，その一般解は

$$y(x) = \boxed{\textbf{47}} + \boxed{\textbf{51}}$$

である．

$\boxed{\textbf{51}}$ の解答群

⓪ e^{-x}	① $2e^{-x}$	② $3e^{-x}$	③ $6e^{-x}$
④ $-e^{-x}$	⑤ $-2e^{-x}$	⑥ $-3e^{-x}$	⑦ $-6e^{-x}$
⑧ xe^{-x}	⑨ $2xe^{-x}$	ⓐ $3xe^{-x}$	ⓑ $6xe^{-x}$
ⓒ $-xe^{-x}$	ⓓ $-2xe^{-x}$	ⓔ $-3xe^{-x}$	ⓕ $-6xe^{-x}$

問 4　xy 平面において，中心が x 軸上にあり原点を通るすべての円を表す微分方程式を求める．これらの円は，0 でない任意定数 c を用いて

$$(*) \qquad (x-c)^2 + y^2 = c^2$$

と表される．y を x の関数と考えて方程式 $(*)$ の両辺を x で微分すると，$\boxed{\mathbf{52}}$ が得られる．

$\boxed{\mathbf{52}}$ **の解答群**

⓪ $(x-c)^2 + (y')^2 = 0$　　① $(x-c)^2 + (y')^2 = c^2$

② $2(x-c) + (y')^2 = 0$　　③ $2(x-c) + (y')^2 = 2c$

④ $2(x+y) = 0$　　⑤ $2(x+y-c) = 0$

⑥ $2(x+y') = 0$　　⑦ $2(x+y'-c) = 0$

⑧ $2(x+yy') = 0$　　⑨ $2(x+yy'-c) = 0$

さらに，方程式 $\boxed{\mathbf{52}}$ と $(*)$ から c を消去すると，微分方程式 $\boxed{\mathbf{53}}$ が得られる．

$\boxed{\mathbf{53}}$ **の解答群**

⓪ $yy' = 0$　　① $y' + 1 = 0$

② $x + y' = 0$　　③ $x + yy' = 0$

④ $y^2 - xy' = 0$　　⑤ $y^2 - (y')^2 = 0$

⑥ $y^2 - xyy' = 0$　　⑦ $(2y-x)y' - y = 0$

⑧ $x^2 + 2xy' - y^2 = 0$　　⑨ $x^2 + 2xyy' - y^2 = 0$

ⓐ $x + y + (x-y)y' = 0$

計算用紙

第４分野　確率・統計

〔 問１〜問７ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{54}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{72}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X), V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均)，分散を表す．

問１　確率変数 X の確率分布が次で与えられている．

X の値	100	40	10
確率	$\dfrac{1}{a+6}$	$\dfrac{5}{a+6}$	$\dfrac{a}{a+6}$

ここで，a は正の定数である．期待値が $E(X) = 20$ のとき，$a = \boxed{\mathbf{54}}$ であり，分散は $V(X) = \boxed{\mathbf{55}}$ である．

$\boxed{\mathbf{54}}$ ・ $\boxed{\mathbf{55}}$ の解答群

⓪ 16	① 18	② 20	③ 22	④ 24
⑤ 250	⑥ 400	⑦ 425	⑧ 800	⑨ 825

問 2　独立な 2 つの事象 A, B に対して，

$$P(A) = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

とする．このとき，

$$P(A \cap B) = \boxed{\mathbf{56}}, \quad P(A \cup B) = \boxed{\mathbf{57}}, \quad P(A^c) = \boxed{\mathbf{58}}, \quad P(A^c \cap B) = \boxed{\mathbf{59}}$$

である．ただし，A^c は A の余事象である．

$\boxed{\mathbf{56}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{59}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{4}$　⑥ $\frac{3}{4}$

⑦ $\frac{1}{5}$　⑧ $\frac{2}{5}$　⑨ $\frac{3}{5}$　ⓐ $\frac{4}{5}$　ⓑ $\frac{1}{6}$　ⓒ $\frac{5}{6}$

問 3　確率変数 X の確率密度関数を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 3e^{-3x} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

とする．

(1)　$x \geqq 0$ において，X の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ は

$$F(x) = \boxed{\textbf{60}}$$

である．

(2)　$t < 3$ において，X の積率母関数 $M(t) = E\left(e^{tX}\right)$ は

$$M(t) = \boxed{\textbf{61}}$$

である．

$\boxed{60}$ の解答群

⓪ e^{-x}　① e^{-3x}　② $3e^{-x}$　③ $3e^{-3x}$

④ $1 - e^{-x}$　⑤ $1 - e^{-3x}$　⑥ $1 - 3e^{-x}$　⑦ $1 - 3e^{-3x}$

$\boxed{61}$ の解答群

⓪ $3e^{-3t}$　① e^{-3t}　② e^{t-3}　③ e^{3-t}

④ $t - 3$　⑤ $3 - t$　⑥ $\dfrac{1}{t-3}$　⑦ $\dfrac{1}{3-t}$

⑧ $\dfrac{3}{t-3}$　⑨ $\dfrac{3}{3-t}$

計算用紙

問 4 独立な確率変数 X, Y の期待値 $E(X)$, $E(Y)$ がともに存在すると仮定する．このとき，

$$E(XY) = \boxed{\textbf{62}}$$

である．したがって， X と Y の共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y) = E\Big(\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}\Big)$ は

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \boxed{\textbf{63}}$$

である．

$\boxed{\textbf{62}}$ ・ $\boxed{\textbf{63}}$ の解答群

⓪ $E(X)E(Y)$　① $E(X) + E(Y)$　② $E(X^2) - E(Y^2)$

③ $\big\{E(X)\big\}^2 - \big\{E(Y)\big\}^2$　④ 0　⑤ 1

⑥ 2

問 5 確率変数 X_1, X_2, X_3 は互いに独立で，いずれも正規分布 $N(2,1)$ に従うものとする．このとき，確率変数

$$Y = X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

は平均 $\boxed{\mathbf{64}}$，分散 $\boxed{\mathbf{65}}$ の $\boxed{\mathbf{66}}$ に従う．

$\boxed{\mathbf{64}}$ ・ $\boxed{\mathbf{65}}$ の解答群

⓪ 6　① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

$\boxed{\mathbf{66}}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布
④ 指数分布　⑤ t 分布

問 6 赤玉と白玉が 1 : 4 の比率で入っている袋の中から無作為に玉を 1 個取り出し，色を確認してから袋に戻す試行を 5 回行う．5 回の試行のうち赤玉の出た回数を表す確率変数を X とすると，X は $\boxed{\mathbf{67}}$ に従う．このとき，期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は，それぞれ

$$E(X) = \boxed{\mathbf{68}}, \quad V(X) = \boxed{\mathbf{69}}$$

である．

$\boxed{67}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

$\boxed{68}$・$\boxed{69}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{5}{4}$　⑥ $\frac{1}{5}$

⑦ $\frac{2}{5}$　⑧ $\frac{3}{5}$　⑨ $\frac{4}{5}$　ⓐ $\frac{1}{16}$　ⓑ $\frac{15}{16}$　ⓒ $\frac{1}{25}$　ⓓ $\frac{24}{25}$

計算用紙

問 7　ある植物の生育調査を行った．この植物は一年草で，調査時期における丈 (高さ) は母平均 μ cm, 母分散 σ^2 cm^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと考えられる．この調査では無作為に 40 本の植物を選び，丈を測定した．その測定値 $x_1, \ldots, x_{40}$ (単位：cm) をもとに母平均 μ の信頼度（信頼係数）95% の信頼区間を求めたい．

標本平均を $\overline{X}$ とする．このとき，母分散の推定量として標本不偏分散 V を用いると，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{V/40}}$$

は自由度 39 の $\boxed{\mathbf{70}}$ に従う．これに基づいて数表を調べると，

$$P\left(-2.023 \leqq \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{V/40}} \leqq 2.023\right) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかり，この式を書きかえると，

$$P\left(\overline{X} - 2.023 \times \sqrt{\frac{V}{40}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 2.023 \times \sqrt{\frac{V}{40}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

となる．

標本平均 $\overline{X}$ および標本不偏分散 V の実現値 $\overline{x}$, v を計算すると，それぞれ

$$\overline{x} = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} x_i = 30, \qquad v = \frac{1}{39}\sum_{i=1}^{40}(x_i - 30)^2 = 160$$

となった．これより $\overline{x}, v$ に対する μ の信頼度 95% の信頼区間は，小数点以下第 3 位を四捨五入すると，

$$\boxed{\mathbf{71}} \leqq \mu \leqq \boxed{\mathbf{72}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{70}}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

$\boxed{\mathbf{71}}$ ・ $\boxed{\mathbf{72}}$ の解答群

⓪ 23.93　① 25.95　② 27.98　③ 30.00　④ 32.02

⑤ 34.05　⑥ 36.07