中国・四国地区大学工学系学部

数学統一試験

2004年12月18日（土曜）

午後1時30分 ～ 午後4時

受験上の注意

(1) 各自の**机の右上に学生証を提示**し, 監督官の照合を受けること.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開かないこと.

(3) 開始の合図の後, 本頁の裏面にある**解答上の注意**を読み，解答方法を確認した上で問題への解答を開始すること.

(4) 解答は各問題の指示にしたがってマークシートにマークすること.

(5) マークには **HB または B の鉛筆**（またはシャープペンシル）を使用すること．芯の黒色が薄いと正しく読み取りができない．修正にはプラスチック材質の消しゴムを使用すること.

(6) マークシートは**破損しないように**丁寧に扱うこと．記入時等にマークシートを**破損したときは監督官に知らせて交換**を要請すること．新しいシートには破損によって書直しが必要と思われる部分, および新規分のみ記入していくこと．破損部分の**書き写しは試験終了後に監督官立ち会い**の下で行う.

(7) **試験開始後 90 分を超えた**場合には, **退席を認める**.（90 分以内の退席は, 特別の事情がない限り認めない.）

(8) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが, どのページも切り離さないこと．試験終了後, 問題冊子は持ち帰ること.

(9) 試験時間は **150 分**である.

(10) その他, 監督官の指示に従うこと.

解答上の注意

(1) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開かないこと.

(2) 解答は, 各問題の指示にしたがってマークシートにマークすること．例えば, $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して ⓒと解答する場合は, 次のようにマークすること.

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(3) 空欄に入れる **適当なものがない場合** には,ⓘをマークすること.

(4) 分数形で解答する場合は, 既約分数 (それ以上約分できない分数) で答えること.

このページは意図的に空白としている．計算用紙として利用して良い．

第 1 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{6}}$ 〕　(配点 60 点)

以下の空欄に, それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ. ただし log は自然対数とする.

問 1　次の値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \boxed{\mathbf{1}}.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ の解答群

⓪ $-\infty$　① ∞　② -3　③ -2　④ -1
⑤ 0　⑥ 1　⑦ 2　⑧ 3

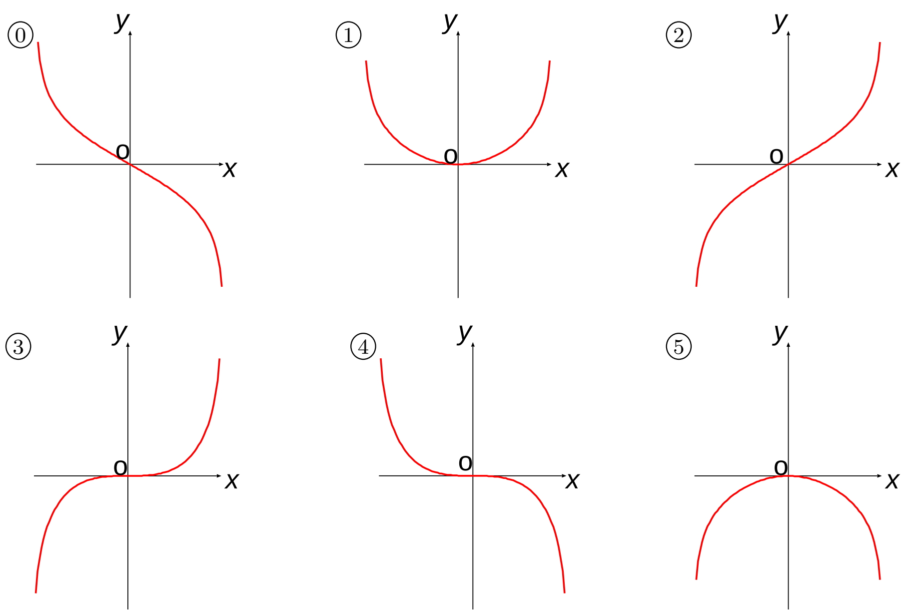
問 2　$(x, y) \to (0, 0)$ のとき, 関数 $g(x, y) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ の極限は $\boxed{\mathbf{2}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0 である　① 1 である　② 2 である　③ 3 である
④ $\dfrac{1}{2}$ である　⑤ $\dfrac{1}{3}$ である　⑥ 存在しない

問 3　関数 $y = \log\dfrac{1+x}{1-x}$　$(-1 < x < 1)$ のグラフの概形は $\boxed{\ \mathbf{3}\ }$ であり，マクローリン展開 $(x = 0$ におけるテイラー展開$)$ は $\boxed{\ \mathbf{4}\ }$ である．ただし x 軸，y 軸の縮尺は適当に変更してある．

$\boxed{\ \mathbf{3}\ }$ **の解答群**



$\boxed{\ \mathbf{4}\ }$ **の解答群**

⓪ $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$　① $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$　② $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$　③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$

④ $2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$　⑤ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$　⑥ $2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$　⑦ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$

問 4　次の積分値を求めよ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin 5x \cos^4 2x \, dx = \boxed{\textbf{5}}\ .$$

$\boxed{\textbf{5}}$ **の解答群**

⓪ -2　① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ -2π　⑥ $-\pi$　⑦ π　⑧ 2π　⑨ $-\dfrac{\pi}{2}$　ⓐ $\dfrac{\pi}{2}$

問 5　xy 平面の集合 $\{(x, y) :\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ を D で表すとき,

$$\iint_D e^{2x-y} \, dxdy = \boxed{\textbf{6}}\ .$$

$\boxed{\textbf{6}}$ **の解答群**

⓪ $e^2 + e + 1$　① $e^2 - e + 1$　② $e^2 + e - 1$　③ $e^2 - e - 1$

④ $-e^2 - e - 1$　⑤ $\dfrac{1}{2}e^2 + e + 1$　⑥ $e^2 - \dfrac{1}{2}e + 1$　⑦ $e^2 + e - \dfrac{1}{2}$

⑧ $\dfrac{1}{2}e^2 + e + \dfrac{1}{2}$　⑨ $\dfrac{1}{2}e^2 - \dfrac{1}{2}e + 1$　ⓐ $\dfrac{1}{2}e^2 - e + \dfrac{1}{2}$　ⓑ $\dfrac{1}{2}e^2 + e - \dfrac{1}{2}$

計算用紙

第 2 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{7}}$ ～ $\boxed{\mathbf{14}}$ 〕　（配点 40 点）

以下の空欄のうち $\boxed{\mathbf{10}}$ から $\boxed{\mathbf{13}}$ までには解答群から適当なものを選んでマークし，それ以外の空欄にはあてはまる数字をマークせよ．

a, b, c を正の定数とする．点 (x, y, z) が条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ を満たしながら動くとき，関数 $f(x, y, z)=xyz$ の最大値と最小値を求めるために，次のように考えた．

最大値または最小値をとる点を (x_0, y_0, z_0) とおけば

$$\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}+\frac{{z_0}^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

が成り立つ．ここで

$$g(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

とおく．このときラグランジュの未定乗数法によれば，点 (x_0, y_0, z_0) において

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g}{\partial z}$$

を満たす実数 λ が存在する．これらの式を実際に計算すると，それぞれ

$$y_0z_0=\boxed{\mathbf{7}}\,\lambda\frac{x_0}{a^2},\quad x_0z_0=\boxed{\mathbf{7}}\,\lambda\frac{y_0}{b^2},\quad x_0y_0=\boxed{\mathbf{7}}\,\lambda\frac{z_0}{c^2} \tag{2}$$

である．(2) の 3 つの等式の両辺をそれぞれ x_0, y_0, z_0 倍した式と (1) より

$$\boxed{\mathbf{8}}\,x_0y_0z_0=2\lambda \tag{3}$$

が分かる．

(i) $\lambda\neq 0$ のときは，(2) と (3) を組み合わせて

$$(x_0, y_0, z_0)=\left(\pm\frac{\boxed{\mathbf{10}}}{\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}},\pm\frac{\boxed{\mathbf{11}}}{\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}},\pm\frac{\boxed{\mathbf{12}}}{\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}\right)$$

である．ただし複号 $(\pm)$ はすべての組み合わせをとる．このとき

$$f(x_0, y_0, z_0)=\pm\frac{\boxed{\mathbf{13}}}{\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}$$

が成り立つ．

(ii) $\lambda = 0$ のときは, (1) と (2) を同時に満たす点 (x_0, y_0, z_0) は $\boxed{\mathbf{14}}$ 個あり, これらすべての点で

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

である.

(i), (ii) を合わせると最大値, 最小値はそれぞれ

$$\frac{\boxed{\mathbf{13}}}{\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}, \quad -\frac{\boxed{\mathbf{13}}}{\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{\boxed{\mathbf{9}}}}$$

である.

$\boxed{\mathbf{10}}$ ～ $\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ a　① b　② c　③ a^2　④ b^2　⑤ c^2　⑥ ab

⑦ bc　⑧ ac　⑨ a^2b^2　ⓐ b^2c^2　ⓑ a^2c^2　ⓒ abc　ⓓ $a^2b^2c^2$

第 3 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{15}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{22}}$ 〕　（配点 60 点）

以下の空欄にあてはまる数字をマークせよ.

問 1　(1)　行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

が正則であるための必要十分条件は

$$a \neq -\boxed{\mathbf{15}} \qquad \text{かつ} \qquad a \neq \boxed{\mathbf{16}}$$

である.

(2)　3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$$

の張る部分空間の次元が 2 となるのは, $b = \boxed{\mathbf{17}}$ の場合である.

(3)　連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + \ \ z \ = 2 \\ x - y + \ az \ = 2 \\ x + y + a^2 z = b \end{cases}$$

について考える.

(a)　$a \neq -\boxed{\mathbf{15}}$ かつ $a \neq \boxed{\mathbf{16}}$ のとき, この連立方程式は b の値にかかわらずただ 1 つの解を持つ. 特に $a = 2$, $b = -4$ であれば $x = \boxed{\mathbf{18}}$ となる.

(b)　$a = -\boxed{\mathbf{15}}$ もしくは $a = \boxed{\mathbf{16}}$ のとき, 連立方程式が解を持つかどうかは b の値によって異なる. 特に $a = \boxed{\mathbf{16}}$ のとき

- $b \neq \boxed{\mathbf{19}}$ の場合には連立方程式は解を持たないが,
- $b = \boxed{\mathbf{19}}$ の場合, 連立方程式は無数の解を持つ. このとき (x, y, z) が解であるための必要十分条件は

$$x + z = \boxed{\mathbf{20}}, \quad y = \boxed{\mathbf{21}}$$

を満たすことである.

問 2 実数 a に対して, 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a^2 & 0 \\ 1 & -1 & a & a \end{vmatrix}$$

の値が -12 となるのは $a = \boxed{\textbf{22}}$ のときである.

第 4 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{23}}$ ～ $\boxed{\mathbf{31}}$ 〕　（配点 40 点）

以下の空欄にあてはまる数字をマークせよ．ただし, I は単位行列とし, 行列 A に対して $\det A$ はその行列式, $\phi_A(\lambda)$ は固有多項式 $\det(\lambda I - A)$ を表すとする．

問 1　行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の 2 つの固有値は,

$$\boxed{\mathbf{23}} \pm \sqrt{\boxed{\mathbf{24}}}$$

である．また, 正の固有値に対応する固有ベクトルで第 2 成分が 1 であるものは

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\boxed{\mathbf{25}}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．

問 2　問 1 の M について M^{-1} をその逆行列とするとき, 0 でない λ に対して

$$\begin{aligned} \phi_{M^{-1}}(\lambda) &= \det(\lambda I - M^{-1}) \\ &= \det\left\{(-\lambda M^{-1})\left(\frac{1}{\lambda}I - M\right)\right\} \\ &= (-\lambda)^{\boxed{\mathbf{26}}}\det(M^{-1})\det\left(\frac{1}{\lambda}I - M\right) \\ &= -\frac{\boxed{\mathbf{27}}}{\boxed{\mathbf{28}}}\lambda^{\boxed{\mathbf{26}}}\phi_M\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

となる．これより, M^{-1} の 2 つの固有値のうち絶対値の大きいものは

$$-\frac{\boxed{\mathbf{29}} + \sqrt{\boxed{\mathbf{30}}}}{\boxed{\mathbf{31}}}$$

となることがわかる．

計算用紙

第 5 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{32}}$ ～ $\boxed{\mathbf{38}}$ 〕　（配点 60 点）

以下の空欄にそれぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

（注意）各問における y は x の関数 $y(x)$ であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問 1　y は初期値問題

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1$$

の解であるとする．このとき, $F(x) = 4y^2 + (y')^2$ に対して, $F'(x) = \boxed{\mathbf{32}}$ であり, $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \boxed{\mathbf{33}}$ である.

$\boxed{\mathbf{32}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 4　④ -1　⑤ -2　⑥ -4

⑦ $-2x$　⑧ $-x$　⑨ x　ⓐ $2x$　ⓑ e^{2x}　ⓒ e^{-2x}

ⓓ $\cos 2x$　ⓔ $\sin 2x$　ⓕ $\cos 2x + \sin 2x$

$\boxed{\mathbf{33}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ $\dfrac{\pi+6}{3}$　④ $-\dfrac{6-\pi}{3}$　⑤ $\dfrac{2\pi}{3}$

⑥ $\sqrt{3}$　⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\sqrt{3}+1$　⑨ $\sqrt{3}-1$　ⓐ $\dfrac{\pi}{3}$

ⓑ $\dfrac{\pi}{6}$　ⓒ $\dfrac{\pi^2}{3}$　ⓓ $\dfrac{\pi^2}{6}$　ⓔ $\dfrac{\pi^2}{9}$　ⓕ $\dfrac{\pi^2}{18}$

問 2 関数 $y = \boxed{\mathbf{34}}$ は微分方程式 $y'' - y' - 6y = 3e^{2x}$ の解のひとつである.

$\boxed{\mathbf{34}}$ **の解答群**

⓪ $-\dfrac{1}{2}e^{2x} + \dfrac{4}{3}e^{-3x}$　① $4xe^{-2x} - \dfrac{3}{4}e^{2x}$　② $\dfrac{1}{2}e^{2x} + \dfrac{4}{3}e^{3x}$

③ $-\dfrac{1}{2}e^{-2x} + \dfrac{4}{3}e^{3x}$　④ $\sqrt{3}e^{-3x} + \dfrac{3}{4}e^{-2x}$　⑤ $\sqrt{3}e^{-2x} - \dfrac{3}{4}e^{2x}$

⑥ $(\log 2)e^{-2x} + \pi e^{3x}$　⑦ $(\log 2)e^{2x} - \dfrac{3}{4}xe^{2x}$

⑧ $e^{-2x} + 2e^{3x} - e^{2x}$　⑨ $\dfrac{2}{\pi}e^{-2x} + (\log 2)e^{3x} - \dfrac{3}{2}e^{2x}$

問 3　初期値問題

$$x^2y' + 2y^2 = x^2, \quad y(1) = 2$$

を（ $x = 1$ の十分近くで）解きたい．そのために, $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ とおくと, z を未知関数とする初期値問題

$$xz' = \boxed{\mathbf{35}}, \quad z(1) = \boxed{\mathbf{36}}$$

が得られ,

$$\int_{\boxed{\mathbf{36}}}^{z} \frac{dz}{\boxed{\mathbf{35}}} = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

となる．ここで, 右辺については $\displaystyle\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x$ であり, 左辺については被積分関数を部分分数に分解して計算すれば, $\displaystyle\int_{\boxed{\mathbf{36}}}^{z} \frac{dz}{\boxed{\mathbf{35}}} = \boxed{\mathbf{37}}$ である．したがって, $z = \boxed{\mathbf{38}}$ であり, $y = x \cdot \boxed{\mathbf{38}}$ である．

$\boxed{\mathbf{35}}$ の解答群

⓪ $z^2 + 2z - 1$　① $z^2 - 2z - 1$　② $-z^2 + 2z + 1$

③ $-z^2 - 2z + 1$　④ $2z^2 + z - 1$　⑤ $2z^2 - z - 1$

⑥ $-2z^2 + z + 1$　⑦ $-2z^2 - z + 1$

$\boxed{\mathbf{36}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8　⑨ 9　ⓐ -1　ⓑ -2

ⓒ -3　ⓓ -4　ⓔ -5　ⓕ -6

$\boxed{37}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{3}(z+1)(2z-1)$　① $3(z+1)(2z-1)$　② $\dfrac{z+1}{3(2z-1)}$

③ $\dfrac{3(2z-1)}{z+1}$　④ $3\log\{(z+1)(2z-1)\}$

⑤ $\dfrac{1}{3}\log\{(z+1)(2z-1)\}$　⑥ $\dfrac{1}{3}\log\dfrac{z+1}{2z-1}$

⑦ $3\log\dfrac{z+1}{2z-1}$　⑧ $\dfrac{1}{3}\log\dfrac{2z-1}{z+1}$　⑨ $3\log\dfrac{2z-1}{z+1}$

$\boxed{38}$ **の解答群**

⓪ $(2x^3-1)(x^3+1)$　① $(2x^3+1)(x^3-1)$　② $\dfrac{x^3+1}{2x^3-1}$

③ $\dfrac{x^3+1}{(2x^3-1)x}$　④ $\dfrac{2x^3-1}{x^3+1}$　⑤ $\dfrac{2x^3-1}{(x^3+1)x}$　⑥ $\dfrac{x^3-1}{2x^3+1}$

⑦ $\dfrac{x^3-1}{(2x^3+1)x}$　⑧ $\dfrac{2x^3+1}{x^3-1}$　⑨ $\dfrac{2x^3+1}{(x^3-1)x}$

第 6 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{39}}$ ～ $\boxed{\mathbf{45}}$ 〕　（配点 40 点）

以下の空欄にそれぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ.

（注意）以下において y は x の関数 $y(x)$ であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表し c, c_1, c_2 は任意定数とする.

微分方程式

$$y'' - 2xy' + x^2 y = (x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}$$

の一般解を求めたい. まず, $y(x) = p(x)z(x)$ とおくと

$$pz'' + \boxed{\mathbf{39}}\, z' + \boxed{\mathbf{40}}\, z = (x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}$$

である. ここで, 関数 p をうまく選んで, z' の係数が 0 になるようにしたい. そのためには p に関する微分方程式 $\boxed{\mathbf{39}} = 0$ の解のひとつである $p(x) = \boxed{\mathbf{41}}$ をとればよい. すると, z に関する微分方程式

$$z'' + \boxed{\mathbf{42}}\, z = \boxed{\mathbf{43}}$$

を得る. この微分方程式の一般解は

$$z = \boxed{\mathbf{44}} + \boxed{\mathbf{45}}$$

であるから, もとの微分方程式の一般解は

$$y = \boxed{\mathbf{41}}\left(\boxed{\mathbf{44}} + \boxed{\mathbf{45}}\right)$$

である.

$\boxed{\mathbf{39}}$ の解答群

⓪ $2xp' - p$　① $2xp' + p$　② $p' - 2xp$　③ $2xp - p'$

④ $p' + 2xp$　⑤ $2(p' - xp)$　⑥ $2(xp - p')$　⑦ $2(p' + xp)$

$\boxed{\mathbf{40}}$ の解答群

⓪ $p'' + xp' + 2x^2p$　① $p'' + xp' - 2x^2p$　② $p'' - xp' + 2x^2p$

③ $p'' - xp' - 2x^2p$　④ $p'' + 2xp' + x^2p$　⑤ $p'' + 2xp' - x^2p$

⑥ $p'' - 2xp' + x^2p$　⑦ $p'' - 2xp' - x^2p$

$\boxed{41}$ の解答群

⓪ e^{x}　① e^{-x}　② e^{x^2}　③ e^{-x^2}　④ e^{2x}　⑤ e^{-2x}

⑥ e^{2x^2}　⑦ e^{-2x^2}　⑧ $e^{\frac{x^2}{2}}$　⑨ $e^{-\frac{x^2}{2}}$　ⓐ $e^{\frac{1}{x}}$　ⓑ $e^{-\frac{1}{x}}$

$\boxed{42}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ -1　⑤ -2　⑥ -3

⑦ x^2+1　⑧ x^2+2　⑨ x^2-1　ⓐ x^2-2

$\boxed{43}$ の解答群

⓪ e^{2x}　① e^{x^2}　② $e^{\frac{x^2}{2}}$　③ x^2-1　④ $(x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}$

⑤ $(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$　⑥ $(x^2-1)e^{x^2}$　⑦ $(x^2-1)e^{-x^2}$

$\boxed{44}$ の解答群

⓪ ce^{x}　① ce^{-x}　② $c_1e^{-x}+c_2e^{x}$　③ $c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

④ $c_1e^{x}+c_2xe^{x}$　⑤ $c\cos x$　⑥ $c\sin x$　⑦ $c_1\cos x+c_2\sin x$

$\boxed{45}$ の解答群

⓪ $2x-1$　① x^2-3　② x^2+3　③ x^2-1　④ x^2+1

⑤ x^2+2x-1　⑥ x^3-2　⑦ x^3+1　⑧ $(x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}$

⑨ $(x^2-1)e^{x}$

第 7 問 〔解答番号 $\boxed{\textbf{46}}$ 〜 $\boxed{\textbf{58}}$ 〕 （配点 60 点）

問 1 以下の各文章が正しい場合は ① を, 誤っている場合には ⓪ をマークせよ.

$\boxed{\textbf{46}}$ 仮説検定を行って帰無仮説 H_0 が棄却されなかったならば H_0 は正しい.

$\boxed{\textbf{47}}$ 確率が $P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0$ である 2 つの 事象 $A,\ B$ が $A \cap B = \phi$ を満たすならば A と B は独立である. ただし ϕ は空事象とする.

$\boxed{\textbf{48}}$ 信頼区間を求めるとき, 信頼度（信頼係数）を大きくすると信頼区間は広くなる.

$\boxed{\textbf{49}}$ 確率変数 X の期待値 $E(X)$ が 2 であっても $E\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{2}$ とは限らない.

以下の空欄 $\boxed{\textbf{50}}$ から $\boxed{\textbf{58}}$ に解答群から適当なものを選んでマークせよ.

問 2 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ がある定数 C に対して

$$f(x) = \begin{cases} Ce^{2x}, & x \leqq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられているとき, $C = \boxed{\textbf{50}}$ である. したがって, X の値が x 以下になる確率として定義される分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ は, $x \leqq 0$ のとき $\boxed{\textbf{51}}$ であり, これから, $P(X > -\log 2) = \boxed{\textbf{52}}$ がわかる. 一方 $x > 0$ のとき $F(x) = \boxed{\textbf{53}}$ である. また, X の期待値は $\boxed{\textbf{54}}$ であり, 分散は $\boxed{\textbf{55}}$ である.

問 3 A, B を事象, $A^c,\ B^c$ をそれぞれ $A,\ B$ の余事象とする. $P(A) = \dfrac{1}{2},\ P(B) = \dfrac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$ のとき, $P(A^c \cap B^c) = \boxed{\textbf{56}}$ である.

問 4 確率変数 X が正規分布 $N(1, 4)$ に従っているとき, $Y = \dfrac{X-1}{2}$ とおくと, Y の期待値は $\boxed{\textbf{57}}$ であり, Y の分散は $\boxed{\textbf{58}}$ である.

$\boxed{50}$ 〜 $\boxed{58}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{4}$

⑥ $-\dfrac{1}{4}$　⑦ $\dfrac{1}{6}$　⑧ $-\dfrac{1}{6}$　⑨ $\dfrac{3}{4}$　ⓐ e^{2x}

ⓑ $1-e^{2x}$　ⓒ $\dfrac{1}{2}e^{2x}$　ⓓ $1-\dfrac{1}{2}e^{2x}$

第 8 問 〔解答番号 $\boxed{\textbf{59}}$ 〜 $\boxed{\textbf{65}}$ 〕 (配点 40 点)

以下の空欄にそれぞれの解答群から適当なものを選びマークせよ.

n は自然数, p は $0 < p < 1$ を満たす定数であるとする. 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立で, 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ について X_k が値 1, 0 をとる確率はそれぞれ

$$P(X_k = 1) = p, \quad P(X_k = 0) = 1 - p$$

であるとする. このとき X_k の期待値 $E(X_k)$ は $\boxed{\textbf{59}}$, ${X_k}^2$ の期待値 $E({X_k}^2)$ は $\boxed{\textbf{60}}$ であり, X_k の分散 $V(X_k)$ は $\boxed{\textbf{61}}$ である.

次に

$$S = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

とおくと, その期待値 $E(S)$ は $\boxed{\textbf{62}}$ である. また $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であることに注意すれば, 分散 $V(S)$ は $\boxed{\textbf{63}}$ となる. ところで, S は $X_1, X_2, \ldots, X_n$ のうち値 1 をとるものの個数を表す確率変数で $\boxed{\textbf{64}}$ 分布に従う. 特に, $p = \dfrac{1}{2}$, $n = 5$ のとき, $P(S = 3) = \boxed{\textbf{65}}$ である.

$\boxed{\textbf{59}}$ 〜 $\boxed{\textbf{65}}$ の解答群

⓪ n　① p　② p^2　③ $p(1-p)$　④ np

⑤ $n(1-p)$　⑥ np^2　⑦ $np(1-p)$　⑧ $n(1-p)^2$

⑨ $\dfrac{5}{16}$　ⓐ $\dfrac{3}{16}$　ⓑ $\dfrac{7}{15}$　ⓒ $\dfrac{4}{15}$

ⓓ 正規　ⓔ ポアソン　ⓕ 指数　ⓖ 2項

計算用紙