

第1分野 微分積分

問1 $x \rightarrow 0$ としたときの関数 $\frac{x^2}{\log(x+1)}$ の極限は、分子 $= x^2 \rightarrow 0$ 、分母 $= \log(x+1) \rightarrow 0$ であるので不定極限になる。そこでロピタルの定理を適用し、分子、分母をそれぞれ微分して極限を取る。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\log(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)'}{(\log(x+1))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{x+1}} = \frac{0}{1} = 0$$

よって、1 の答えは ④ である。

$x \rightarrow \infty$ のときの関数 $\frac{3^x}{x^3}$ の極限も、分子 $\rightarrow \infty$ 、分母 $\rightarrow \infty$ となって不定極限になる。分母または分子の少なくとも一方が確定した極限值をとるようになるまでロピタルの定理を繰り返し適用する。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3^x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x \log 3}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3^x \log 3)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x (\log 3)^2}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3^x (\log 3)^2)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x (\log 3)^3}{6} = \infty \end{aligned}$$

となる。したがって、2 の答えは ㉔ である。

二番目の極限を求める問題において、上の解答のようにロピタルの定理を機械的に何度も適用するよりも、指数関数は、多項式関数より急激に増大するという事実を数学的常識として理解し、即座に極限は ∞ に発散すると答えられることが望ましい。試しに計算してみると、 $x = 100$ において、 $3^{100} \doteq 4.15 \times 10^{47}$ 、 $100^3 = 10^6$ であるので、その比は

$$\left. \frac{3^x}{x^3} \right|_{x=100} \doteq 4.15 \times 10^{41}$$

となり、巨大な天文学的な数である。

問2 (1) $f(x) = x \sin x$ に対して、

$$f(-x) = (-x) \sin(-x) = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x)$$

であるから $f(x)$ は偶関数である。あるいは、 x と $\sin x$ は奇関数であるからその積は偶関数であると結論してもよい。いずれにしても、3 の答えは ㉔ である。

偶関数の条件

$$f(-x) = f(x)$$

の両辺をそれぞれ n 回微分すると

$$(-1)^n f^{(n)}(-x) = f^{(n)}(x)$$

である．この式で $x = 0$ とおくと

$$(-1)^n f^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

を得る．これより $\{(-1)^n - 1\}f^{(n)}(0) = 0$ である． n が偶数ならばこの式は自動的に成り立ち情報を与えない．しかし， n が奇数ならば $-2f^{(n)}(0) = 0$ より $f^{(n)}(0) = 0$ が結論される．あらためて n を，任意の自然数 n に対して奇数を表わす $2n - 1$ で置き換えることにより，4 の答えは ② になる．

- (2) 関数 $\sin x$ は，指数関数 e^x と同じように，マクローリン展開できて，得られるべき級数（整級数）はすべての x について収束する．

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin x = (-1)^n \sin x, \quad \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin x = (-1)^n \cos x$$

であるので， $\sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \cdots$$

である．これに x をかけて，

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n} + \cdots$$

を得る．マクローリン級数は一意的に定まるので，これは $f(x)$ のマクローリン展開である．したがって，5 の答えは ⑥ である．

問 3 まず合成関数 $f(x) = \log g(x)$ の導関数は，合成微分の公式から

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

であることに注意する．問題の関数では $g(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ である．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{1 + \sin x}{\cos x}} \cdot \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\cos x \cos x - (1 + \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x} \\ &= \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

となるから、**6** の答えは ③ である．

問 4 有理関数 $\frac{2 + x - x^2}{1 - x + x^2 - x^3}$ の部分分数展開は

$$\frac{2 + x - x^2}{(1 - x)(1 + x^2)} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b + cx}{1 + x^2}$$

とおける．ここで、 a, b, c は未知定数である．両辺に $(1 - x)(1 + x^2)$ を掛けて分母を払い、右辺を整理する．

$$\begin{aligned} 2 + x - x^2 &= a(1 + x^2) + (b + cx)(1 - x) \\ &= (a + b) + (c - b)x + (a - c)x^2 \end{aligned}$$

両辺の多項式の係数比較より、

$$2 = a + b, \quad 1 = c - b, \quad -1 = a - c$$

を得る．これを解けば $a = b = 1, c = 2$ である．よって、**7** の答えは ⑥、

8 の答えは ⑥、**9** の答えは ⑦ である．

部分分数展開で導かれた各項の積分は次のようになる．ただし、簡単のために積分定数を省略する．

$$\int \frac{1}{1 - x} dx = - \int \frac{1}{x - 1} dx = -\log|x - 1| = -\log|1 - x|,$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \tan^{-1} x,$$

$$\int \frac{2x}{1 + x^2} dx = \int \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} dx = \log(1 + x^2)$$

である．したがって、**10** の答えは ⑧、**11** の答えは ②、**12** の答えは ③ である．

問5 $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ であるから, $f(1, 1) = \tan^{-1} 1$. ここで, $\tan \theta = 1$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ は $\frac{\pi}{4}$ であるから, **13** の答えは ㉔ となる.

次に, $f(x, y)$ の偏導関数は,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

となる. これより,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

である. したがって,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y-1) = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

となり, **14** の答えは ㉕ である.

問6 変数変換 $x = u + v$, $y = v - u$ を u, v について解いた式は,

$$u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2} \tag{1}$$

である. この変換の下で, $x - y = 2u$, $x + y = 2v$ であるから

$$0 \leq x - y \leq 2, \quad 0 \leq x + y \leq 4$$

を満たす (x, y) は

$$0 \leq 2u \leq 2, \quad 0 \leq 2v \leq 4$$

を満たす (u, v) に写る. これから変数変換後の積分領域 D' は

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2$$

を満たす (u, v) のなす点集合になる. (最後の参考における図を参照.) したがって,

15 の答えは ①, **16** の答えは ② である.

変数変換のヤコビ行列式は,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2$$

であるから，17 の答えは 5 である。

一般に，与えられた重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ に対して，変数変換

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v)$$

を行って，変数 u, v に関する重積分に書き表すことを考える．この変数変換によって xy 平面上の積分領域 D が uv 平面上の領域 D' に写るとき，重積分の変数変換の公式は，

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(X(u, v), Y(u, v)) \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

で与えられる（ヤコビ行列式の絶対値をとらなければならないことに注意する．）

今の問題では，

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{(x-y)^2}, \quad X = u - v, \quad Y = u + v$$

であるから， $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 4uv$ に注意すると，

$$f(X(u, v), Y(u, v)) = 4uv e^{4u^2}$$

である．上で計算したヤコビ行列式の結果を代入すると，

$$\iint_D (x^2 - y^2) e^{(x-y)^2} dx dy = \iint_{D'} 4uv e^{4u^2} \cdot 2 du dv \quad (2)$$

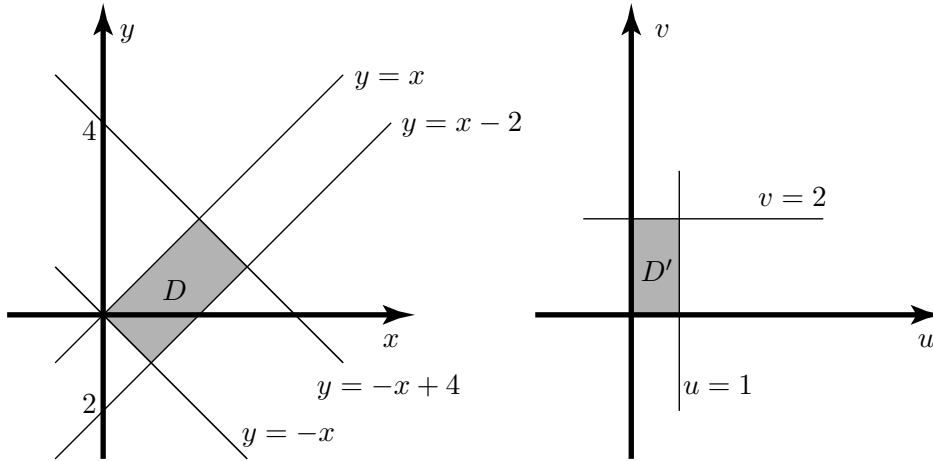
を得る．積分領域 D' は座標軸に平行な辺を持つ長方形領域であるから，右辺の積分を簡単に累次積分の形に書き改めて積分値を計算できる．具体的に，

$$\begin{aligned} \iint_{D'} 8uv e^{4u^2} du dv &= \int_0^2 \left\{ \int_0^1 8uv e^{4u^2} du \right\} dv \\ &= \int_0^2 v \left[e^{4u^2} \right]_{u=0}^{u=1} dv = \int_0^2 v(e^4 - e^0) dv \\ &= (e^4 - 1) \int_0^2 v dv = (e^4 - 1) \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_0^2 \\ &= (e^4 - 1) \cdot \frac{1}{2} (2^2 - 0^2) \\ &= 2(e^4 - 1) \end{aligned}$$

となる．

以上より，18 の答えは f，19 の答えは 4，20 の答えは c である。

[参考] 問題における変数変換 $x = u + v$ ， $y = v - u$ は線形変換であり，平行四辺形を平行四辺形に写す．具体的には下図のように， $\frac{1}{2}$ 縮小させながら， $\frac{\pi}{2}$ 回転を引き起こす縮小回転になる．



第2分野 線形代数

問1 (1) A が逆行列 A^{-1} を持つことは, A の行列式が $|A| = 8+4+9-12-6-4 = -1 \neq 0$ であることからわかる.

E を 3 次単位行列とすると, 与えられた行列が逆行列になる条件 $AA^{-1} = E$ は, 具体的に

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & \boxed{21} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

になる. これが成り立つように隠された行列成分 $\boxed{21}$ を決めればよいだけである.

$\boxed{21}$ を計算に含むならば, どの行とどの列を取り出してもよいが, 例えば, A の 1 行と A^{-1} の 2 列を選んで (1,2) 成分を計算した結果が右辺の 0 になる式は,

$$2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot \boxed{21} = 0$$

となる. これより $\boxed{21} = 4$ である. したがって $\boxed{21}$ の答えは ⑨.

(2) $Ax = b$ を満たす x は, 上で求めた逆行列 A^{-1} を使って $x = A^{-1}b$ と求められる. 右辺の積を計算すると,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

であるから, $\boxed{22}$ の答えは ⑥ である.

問2 行列式を計算するには, 行列式に対して許される行や列の変形を行って上半三角形の行列式の形に持ち込めばよい.

第 2 行を 2 倍したものを第 4 行から引いて (4,1) 成分を 0 にする. 続いて, 第 1 行を 2 倍したものを第 3 行から引いて (3,2) 成分を 0 にする.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

さらに、第1行と第2行を入れ替え、また第3行と第4行を入れ替え、零でない行列成分が対角成分とその上半分だけに存在するようにする。

$$= (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

上半三角形の行列式の形になったので、対角成分を掛けると行列式の値が求められる。

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-3) = 9$$

これから **23** の答えは **c** である。

問3 (1) a, b が直交するのは、内積 $a \cdot b$ が 0 になるときである。

$$a \cdot b = -8 + 2c + 2c = 4c - 8 = 0$$

であるから $c = 2$ 。したがって **24** の答えは **⑧** である。

(2) 行列 A はその定義から

$$A = a^t b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (-1, c, 2c) = \begin{pmatrix} -8 & 8c & 16c \\ -2 & 2c & 4c \\ -1 & c & 2c \end{pmatrix}$$

である。 A の階数 (ランク) の計算の仕方はいろいろあるが、その一つは、 A の列ベクトル全体の中で1次独立となる列ベクトルの最大個数 (列ベクトルが張る部分空間の次元) を求めることである。上の A の形を見れば明らかなように A の列ベクトルはすべて a の定数倍である。1次独立となる列ベクトルは一つであるから、 A の階数は1である。よって、 **25** の答えは **⑦**。

[参考] 上の議論から、自然数 n の値にかかわらず、0でない二つの n 次元ベクトル a, b から作られる n 次正方行列 $A = a^t b$ の階数は常に1であることがわかる。逆も成り立つ。すなわち、 n 次正方行列 A の階数が1であるとき、適当な n 次元ベクトル a, b を取って $A = a^t b$ と表すことができる。

(3) 集合 $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$ は \mathbb{R}^3 のベクトル部分空間になる。実際に、 $x_1, x_2 \in V$ ならば、すなわち $Ax_1 = 0, Ax_2 = 0$ ならば、任意の定数 (スカラー) a, b に関して

$$A(ax_1 + bx_2) = aAx_1 + bAx_2 = 0 + 0 = 0$$

となり, $ax_1 + bx_2 \in V$ となるからである.

全体 \mathbb{R}^3 が 3 次元であり, A の階数が 1 であるから, V の次元は $3 - 1 = 2$ である. よって, 26 の答えは ③ である.

[参考] 一般に, A が k 次の正方行列で, その階数が r であるとき, $\{x \in \mathbb{R}^k \mid Ax = 0\}$ は \mathbb{R}^k の $k - r$ 次元のベクトル部分空間をなす.

$Ax = 0$ は x の成分で表すと, k 個の 1 次方程式になる. 上の事実は次のように理解される. k 個の 1 次方程式の中で独立な方程式は r 個であり, 解 x は $k - r$ 個の任意パラメータを含む形で求められる.

- (4) $a \neq 0$ なので $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = a\}$ は零ベクトル 0 を含まない. これは W はベクトル空間でないことを意味する. 当然, \mathbb{R}^3 のベクトル部分空間にならない. したがって 27 の答えは ① である.

問 4 (1) A の固有値 λ を求めるには, A の特性方程式 (固有方程式)

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (E \text{ は } 2 \text{ 次単位行列})$$

を解けばよい. 具体的に, 特性方程式は,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

となるから, $\lambda = 1, 2$ を得る. $\alpha < \beta$ の指定より固有値は $\alpha = 1, \beta = 2$ である. よって, 28 の答えは ⑥, 29 の答えは ⑦.

- (2) 一般に, 固有値 λ に対応する固有ベクトル x とは,

$$Ax = \lambda x, \quad \text{すなわち} \quad (A - \lambda E)x = 0$$

を満たす 0 でないベクトル x のことである.

固有値 $\alpha = 1$ に対応する固有ベクトル x に対する式は, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(A - E)x = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

になる. これを満たす x は, $x = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$ と書ける. ここで y は 0 でない実数である. 固有ベクトル取り方にはこのように任意性が残るが, 問題では固有ベクトル p として第 2 成分が 1 と指定しているので, $y = 1$ と取り $p = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

同様に, 固有値 $\beta = 2$ に対応する A の固有ベクトル x に対する式は,

$$(A - 2E)x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから, $x = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$ と書ける. これより $q = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

以上から, **30** の答えは ④, **31** の答えは ③ である.

- (3) 問題文にあるように固有ベクトルを並べて得られる行列 $P = (p \ q)$ によって A は,

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \quad (3)$$

と表される.

一般に, 同じ次数の二つの正方行列 A, B がある正則な行列 P によって

$$A = PBP^{-1} \quad (4)$$

と関係づけられるとき, A と B は相似であるという. A と B が相似ならば, それらの n 乗も相似になる. すなわち,

$$A^n = PB^nP^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

式 (3) は, 問題で与えられた行列 A が固有値を対角成分とする対角行列に相似になることを示す. このことを簡単に A は対角化可能であるという.

対角化する利点は, 対角行列の n 乗は, 対角成分の n 乗を成分とする対角行列になり, 簡単に計算されるということである.

今の問題では,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

であり, $P = (p \ q) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ であるので,

$$\begin{aligned} A^n = PB^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & -2 + 2^{n+1} \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算される。したがって、32 の答えは ③ である。

[参考] 行列の対角化は、以上のようなベキ乗計算といった数学的な応用にとどまらず、工学において様々な応用がある。例えば、主慣性モーメントや固有振動数の計算など。したがって行列の対角化についての学習はきわめて大切である。

いま与えられた k 次正方行列 A が (4) によって対角行列 B に相似であるとき、 B の対角成分は A の固有値であり、 P の列ベクトルは A の固有ベクトルになる。よって、 P が正則になるための条件から、 k 次正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は、 A が k 個の 1 次独立な固有ベクトルを持つことである、という定理が得られる。この定理の条件が満たされる代表的な場合として次の二つがあげられる。

固有値がすべて相異なる行列は、対角可能である。

実対称行列は、対角可能である。

最後に、すべての正方行列が対角化可能であるわけではないことに注意する。例えば、 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は対角化できない。なぜなら、固有値 2 に対して 2 個の 1 次独立な固有ベクトルを取れないからである。

問 5 (1) 1 次独立性の定義により、3 個のベクトル v_1, v_2, v_3 が 1 次独立になるのは、任意に与えられた 1 次関係

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \mathbf{0} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ は定数}) \quad (5)$$

に対して $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が結論されることである。

式 (5) は、3 つの縦ベクトルを横に並べてできる行列 $(v_1 \ v_2 \ v_3)$ を用いて、

$$(v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

と表わすことができる。

さて、

$$P = (v_1 \ v_2 \ v_3) \quad (7)$$

とおくと、今の問題では、 P は 3 次の正方行列である。したがって任意の c_1, c_2, c_3 に対して (6) から $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が結論されるのは P が逆行列を持つとき

である．さらに，逆行列を持つのは P の行列式が 0 でないときである．

$$|P| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5a + 2 - 6a - 4 = -a - 2$$

であるから， $|P| \neq 0$ となるのは， $a \neq -2$ のときである．よって，**33** の答えは ④．

- (2) ベクトル $w = \alpha v_1 + \beta v_2 + v_3$ ， (α, β は実数) が A の固有ベクトルになるのは，適当な数 λ に関して，

$$Aw = \lambda w \tag{8}$$

が成り立つことである． w は v_3 の項を含むから， w は明らかに 0 でない．

与えられた条件

$$Av_1 = v_1, \quad Av_2 = 2v_2, \quad Av_3 = 3v_1 + 2v_2 + 4v_3 \tag{9}$$

を使うと，(8) の左辺は，

$$\begin{aligned} Aw &= A(\alpha v_1 + \beta v_2 + v_3) \\ &= \alpha Av_1 + \beta Av_2 + Av_3 \\ &= \alpha v_1 + 2\beta v_2 + 3v_1 + 2v_2 + 4v_3 \\ &= (\alpha + 3)v_1 + (2\beta + 2)v_2 + 4v_3 \end{aligned}$$

となる．一方，右辺は

$$\lambda w = \lambda \alpha v_1 + \lambda \beta v_2 + \lambda v_3$$

である． v_1, v_2, v_3 は 1 次独立であるから，(8) の左右のそれぞれのベクトルの係数を比較して

$$\alpha + 3 = \lambda \alpha, \quad 2\beta + 2 = \lambda \beta, \quad 4 = \lambda$$

を得る．これを解けば， $\alpha = 1, \beta = 1, \lambda = 4$ のとき， w は固有値 $\lambda = 4$ に対応する A の固有ベクトルになることがわかる．

以上より，**34** の答えは ⑦，**35** の答えは ⑦，**36** の答えは ① である．

(9) は， v_1, v_2 はそれぞれ固有値 1, 2 に対応する A の固有ベクトルであることを示している．したがって A の全部の固有値は 1, 2, 4 であり， A の固有多項式は，

$$|A - \lambda E| = (-1)^3(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

となる．この式で $\lambda = 0$ とおくことにより $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ を得る．したがって 37 の答えは \textcircled{e} である．

次のように $|A|$ を求めてもよい．条件 (9) は, (7) で与えられる行列 P を用いて

$$AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

と表される． v_1, v_2, v_3 は 1 次独立であるから P は逆行列をもつ．したがって

$$A = PBP^{-1} \quad \text{ただし, } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

これから,

$$|A| = |P||B||P^{-1}| = |P||P^{-1}||B| = |PP^{-1}||B| = |E||B| = |B| \quad (10)$$

となり A と B の行列式の値は等しい． B は上半三角行列 (零でない行列成分が, 対角線上とその上半分にだけある行列) であるから, B の対角成分をかけて $|B| = 8$ が求められる．

[参考] 行列 B は A の基底 v_1, v_2, v_3 に関する行列表現という．

(10) 式は, 相似になる二つの行列の行列式は等しいことを示す．このことを, 行列式は相似な行列のなす同値類の不変量である, といった数学的な言い方をすることもある．行列式以外の不変量として, 例えば, 行列の対角成分の和 (跡, トレース) などがある．

第3分野 常微分方程式

問1 与えられた微分方程式 $y' = (1 - 2x)y^2$ は変数分離形である．そこで、

$$\frac{y'}{y^2} = 1 - 2x$$

と書き直し、両辺を積分すれば、

$$-\frac{1}{y} = -(x^2 - x + C)$$

を得る．ただし C は任意定数である．これから一般解として

$$y = \frac{1}{x^2 - x + C} \quad (11)$$

を得る．したがって、**38** の答えは ㉔ ．

続いて初期条件 $y(0) = 2$ を満たす解 $y(x)$ を求める．一般解 (11) より $y(0) = \frac{1}{C} = 2$ となり、 $C = \frac{1}{2}$ である．したがって、**39** の答えは ㉑ である．

求めた解 $y(x)$ は、

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} > 0$$

と変形され、すべての実数 x に対して $y(x) > 0$ であることがわかる．さらに、微分方程式の解なのであるから、 $y'(x) = (1 - 2x)y^2(x)$ であり、これより直ちに $x < \frac{1}{2}$ において $y'(x) > 0$ 、 $x > \frac{1}{2}$ において $y'(x) < 0$ であることがわかる．よって、 $y(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で最大値をとる．最大値は $y(\frac{1}{2}) = 4$ である．

以上より、**40** の答えは ㉑、**41** の答えは ㉔ である．

問2 微分方程式

$$y' + xy = \frac{x}{y} \quad (12)$$

に対して、問題文で指示されているように $z(x) = y(x)^2$ と未知関数の変換をし、 z に関する微分方程式に書き直す．

方程式 (12) の両辺に $2y$ をかけた式は

$$2yy' + 2xy^2 = 2x$$

である． $z' = 2yy'$ に注意すれば、 y と y' は簡単に消去されて z に関する微分方程式

$$z' + 2xz = 2x \quad (13)$$

を得る．これから **42** の答えは **(b)** である．

方程式 (13) は, z に関する線形微分方程式であるので, その両辺に積分因子 e^{x^2} をかけると

$$(e^{x^2} z)' = 2xe^{x^2}$$

と変形される．続いて両辺を x について積分すれば

$$e^{x^2} z = \int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C$$

を得る． C は積分定数 (任意定数) である．これを z について解いて (13) の一般解

$$z = 1 + Ce^{x^2} \quad (14)$$

を得る．したがって, **43** の答えは **(4)**, **44** の答えは **(e)** である．

(13) は変数分離形でもあるので, $\frac{z'}{1-z} = 2x$ と変数を分離し, 両辺を積分することにより (14) を導くこともできる．

さて, (14) より方程式 (12) の一般解は

$$y = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{1 + Ce^{-x^2}} \quad (15)$$

になる．初期条件 $y(0) = 2$ を満たす解 $y(x)$ は, $y(0) > 0$ であるので, 解の連続性より (15) の正の分岐の形 $y(x) = \sqrt{1 + Ce^{-x^2}}$ になる．実際に初期値を満たす解は

$$y = \sqrt{1 + 3e^{-x^2}}$$

である．よって, **45** の答えは **(7)** である．

[参考] 一般に,

$$y' + f(x)y = g(x)y^n$$

の形の微分方程式はベルヌイの微分方程式とよばれている．この方程式は, $n = 0$ のとき線形微分方程式であり, $n = 1$ のときは右辺を左辺に移項すれば, 同次線形微分方程式である． $n \neq 0, 1$ のときは, $z = y^{1-n}$ と変数変換すれば z に関する線形微分方程式が得られる．

問 3 微分方程式 $y'' = ay$ の一般解 y は, 定数 a の符号に応じて,

$$y = \begin{cases} Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x} & (a > 0 \text{ のとき}) \\ Ax + B & (a = 0 \text{ のとき}) \\ A \cos(\sqrt{-a}x) + B \sin(\sqrt{-a}x) & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (16)$$

で与えられる．ただし, A, B は任意定数である．

- (1) $a = 0$ のとき, 初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = -1$ を満たす解は,

$$y(0) = A \cdot 0 + B = B = 1, \quad y'(0) = A = -1$$

より, $y(x) = -x + 1$ である. これから $y(x) = 0$ になるのは $x = 1$ のときである. したがって, 46 の答えは ⑤ である.

- (2) 初期条件より, 解 $y(x)$ は恒等的に 0 ではない関数であることに注意する. このとき, (16) における一般解の形を見ると, $a = 0$ と $a > 0$ の場合の一般解は, A, B の値にかかわらず x が十分に大きくなると単調に増大するか, 単調に減少するかのいずれかであって, 決して周期関数にならないことがわかる.

$a < 0$ の場合には解は $y(x) = A \cos(\sqrt{-a}x) + B \sin(\sqrt{-a}x)$ の形をしている. これから正数 p が適当な自然数 n に関して

$$\sqrt{-a}p = 2n\pi$$

を満たすとき p は $y(x)$ の周期になる.

特に, $p = \pi$ となるのは, $\sqrt{-a} = 2n$, すなわち, $a = -4n^2$ と表されるときである. このような a は数列 $-4, -16, -36, \dots$ をなすが, 解答群の中にあるのは -4 だけなので, 47 の答えは ⑩ である.

- (3) (16) の一般解の形を見ると, $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ となる解が生じるのは, $a > 0$ の場合である. さらに, $y(x) = A e^{\sqrt{a}x} + B e^{-\sqrt{a}x}$ が $x \rightarrow \infty$ のときに 0 に収束するのは $A = 0$, すなわち解が $y(x) = B e^{-\sqrt{a}x}$ の形をしているときである. この解が初期条件を満たすのは, $y'(x) = -B \sqrt{a} e^{-\sqrt{a}x}$ より,

$$y(0) = B = 1, \quad y'(0) = -B \sqrt{a} = -1$$

が成り立つときである. これより $B = 1, a = 1$ となる. よって, 48 の答えは ⑤ である.

- 問 4 (1) 微分方程式 $y'' + 4y' + 13y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ である. これから特性根は $\lambda = -2 + 3i$ になる. ただし, $i = \sqrt{-1}$. したがって, 一般解は

$$y(x) = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \tag{17}$$

である. ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.

(17) に与えられた初期条件を代入すれば,

$$y(0) = C_1 = 0, \quad y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 3$$

である．これより $C_1 = 0, C_2 = 1$ を得る．よって初期値問題の解は

$$y(x) = e^{-2x} \sin 3x$$

である．

以上より，**49** の答えは ④，**50** の答えは ⑦ である．

(2) 関数 $y(x) = A \cos x + B \sin x$ を微分方程式の左辺に代入すると，

$$\begin{aligned} & y'' + 4y' + 13y \\ &= (A \cos x + B \sin x)'' + 4(A \cos x + B \sin x)' + 13(A \cos x + B \sin x) \\ &= (-A \cos x - B \sin x) + 4(-A \sin x + B \cos x) + 13(A \cos x + B \sin x) \\ &= (12A + 4B) \cos x + (-4A + 12B) \sin x \end{aligned}$$

であり，これが $40 \sin x$ に一致すればよい． $\cos x, \sin x$ の係数を比較して

$$12A + 4B = 0, \quad -4A + 12B = 40$$

を得る．これを A, B について解いて， $A = -1, B = 3$ と定まる．したがって，

51 の答えは ⑤，**52** の答えは ⑨ である．

一般に，三角関数の合成により，

$$\begin{aligned} A \cos x + B \sin x &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \right) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\sin \phi \cos x + \cos \phi \sin x) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \phi) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし ϕ は， $\sin \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \cos \phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ を満たす角である．この関数の周期は明らかに 2π であり，振幅は $\sqrt{A^2 + B^2}$ である．

解 $y(x) = -\cos x + 3 \sin x$ については， $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ である．したがって，**53** の答えは ①，**54** の答えは ⑥ である．

[参考] 微分方程式

$$y'' + 4y' + 13y = 40 \sin x \quad (18)$$

の一般解は，(同次方程式の一般解) + (非同次方程式の特殊解) として求められるから，以上の結果より一般解は，

$$y(x) = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \cos x + 3 \sin x$$

になる．ここで， C_1, C_2 は任意定数である． x が限りなく大きくなると，同次方程式の一般解の項は限りなく小さくなるので，解は非同次方程式の特殊解 $-\cos x + 3 \sin x$ に接近する．この事実を指して，微分方程式 (18) のすべての解は， $x \rightarrow \infty$ において極限周期解 $-\cos x + 3 \sin x$ に収束するという．

第4分野 確率・統計

問1 離散的確率変数の期待値と分散を計算する問題である。

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$$

したがって、55 の答えは \textcircled{b} 、56 の答えは \textcircled{d} である。

[注意] $m = E(X)$ とおくと、分散の定義は $V(X) = E((X - m)^2)$ であるが、実際の計算には $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = E(X^2) - m^2$ を用いる。

問2 分布関数の定義から直ちに解ける問題である。

$$P(1 < X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1)$$

$$= F(5) - F(1) = 1 - 0.4 = 0.6$$

である。したがって 57 の答えは $\textcircled{4}$ 。

問3 事象および確率変数の独立性を理解しているかを問う問題である。

- 2つの事象 A, B が独立であるとは、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{19}$$

が成り立つことである。

いま事象 $\{X \leq 3\}$ を A 、事象 $\{Y > 4\}$ を B と表すと、与えられた条件より、

$$P(A \cap B) = P(X \leq 3, Y > 4) = \frac{1}{4}$$

一方、

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。よって、式 (19) が成り立つので、 A, B は 独立である。

- 2つの確率変数 X, Y が独立であるとは、それぞれの確率変数の分布関数を $F_X(x), F_Y(y)$ とし、 $F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ とするとき、任意の x, y について

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad (20)$$

が成り立つことである。

問題文中における情報だけでは、式 (20) が成り立つかどうかわからないので、 X と Y は 独立であるとも従属であるともいえない。

- (20) より、『確率変数 X, Y が独立ならば、 $E(XY) = E(X)E(Y)$ である』が導かれる。この命題の対偶は、『 $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ ならば、 X, Y は従属である』である。

さて、与えられた条件から、 $E(X)E(Y) = 12$ であり、 $E(X)E(Y) \neq E(XY)$ となるので、 X と Y は 従属である ということになる。

以上から、58 の答えは ①、59 の答えは ②、60 の答えは ① である。

問 4 連続的確率変数の期待値と分散を計算する問題である。 $E(X)$ の定義より、

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_{-1}^1 x(1 - |x|) dx$$

ここで被積分関数が奇関数であることに注意すれば、 $E(X) = 0$ であることがわかる。

次に、 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ であるから、 $E(X^2)$ を計算すればよい。

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^2(1 - |x|) dx$$

偶関数の積分であるから

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^1 x^2(1 - x) dx = 2 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。これから $V(X) = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$ 。

以上の計算より、61 の答えは ①、62 の答えは ⑥。

問 5 与えられたデータからモーメント法を使って点推定を行う問題である。

一般に、モーメント法とは、標本に関するある次数のモーメントと、想定した確率変数の同じ次数のモーメントが一致すると仮定して母数の推定値を決める方法である。用いる次数はどのようなものを用いても構わないが、母数(パラメータ)の数が k であるとき 1 次から k 次までのモーメントを用いることが多い。

標本が $\{x_1, \dots, x_n\}$ であるとき、標本 k 次モーメントは

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (21)$$

で計算される。

一方、確率変数 X の k 次モーメントは $E(X^k)$ である。特に、1 次モーメントは平均（期待値） $E(X)$ であり、2 次モーメントは、分散 $V(X)$ に関して $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ が成り立つことから、平均と分散を用いて

$$E(X^2) = \{E(X)\}^2 + V(X) \quad (22)$$

で計算される。

さて、問題では推定する母数は平均と分散の 2 つなので、1 次と 2 次の 2 つのモーメントを用いて推定している。標本数は 20 なので、標本 1 次モーメントは、(21) において $n = 20, k = 1$ とおいた式になる。同様に、標本 2 次モーメントは、(21) において $n = 20, k = 2$ とおいた式である。したがって、**63** の答えは ①、**64** の答えは ③ である。

一方、確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、 $E(X) = \mu, V(X) = \sigma^2$ であるので、上で説明したことより、 X の 1 次モーメント、2 次モーメントは、

$$E(X) = \mu, \quad E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

である。したがって、**65** の答えは ①、**66** の答えは ⑥ である。

モーメント法により、標本モーメントと確率変数のモーメントが等しいものと仮定すれば、問題文中で与えられた標本モーメントの計算結果を代入して、2 つの等式

$$\begin{cases} \mu = 100 \\ \mu^2 + \sigma^2 = 10380 \end{cases}$$

を得る。両式を満たす μ, σ^2 を $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ と書くと、第 1 式から $\hat{\mu} = 100$ であり、第 2 式から $\hat{\sigma}^2 = 10380 - 100^2 = 380$ が求められる。よって、**67** の答えは ②、**68** の答えは ④ である。

問 6 一般論から始めよう。母集団の分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ であるとき、 n 個の標本 X_1, X_2, \dots, X_n は、それぞれ独立で、 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う。さらに、正規分布に従う独立な確率変数の和は正規分布になる（正規分布の再生性）から、 $Y = X_1 + \dots + X_n$ は正規分布に従う。 Y の平均と分散は、

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n\mu \\ V(Y) &= V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = n\sigma^2 \end{aligned}$$

である．この $V(Y)$ の計算で X_i の独立性を使っている．

これから標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ も正規分布に従い，その平均と分散は

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}E(Y) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}V(Y) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (23)$$

である．

さて，与えられた問題では $\sigma^2 = 10^2$ であり，標本数は $n = 10$ であるので，標本平均 \bar{X} は，(23) より平均 μ ，分散 $\frac{10^2}{10} = 10$ の正規分布に従う．

次に，正規分布に従う確率変数に定数を加えたり，定数倍して得られる確率変数も正規分布に従うので， $a, b \neq 0$ を定数とすると

$$Z = \frac{\bar{X} - a}{b} \quad (24)$$

は正規分布に従う．その平均と分散は，

$$E(Z) = \frac{E(\bar{X}) - a}{b} = \frac{\mu - a}{b}, \quad V(Z) = \frac{V(\bar{X})}{b^2} = \frac{10}{b^2}$$

であるから， Z の分布が標準正規分布 $N(0, 1)$ になるのは $\mu - a = 0$ ， $\frac{10}{b^2} = 1$ のときである．したがって， $a = \mu$ ， $b = \sqrt{10}$ である．よって，**69** の答えは ⑥，

70 の答えは ① である．

最後に，標本の数 n を増やすと，(23) よりわかるように標本平均 \bar{X} が従う正規分布の分散が小さくなるので，信頼区間の幅が狭くなる．

直感的に言うと，標本の数が増えることは，母集団に関する情報（知識）が増え，より精度の高い推定が出来ることを意味する．今の場合，信頼区間は真の母数が存在すると見込める範囲を表しており，精度が高くなるということは，母数の存在範囲をより狭い範囲で特定できるということになる．簡単に，情報量が増えると信頼区間の幅が狭くなる，といえる．

したがって **71** の答えは ① である．